Los polinomios que pueden factorizarse presentan características según las cuales se agrupan en diferentes casos.

Factor común:

Este caso se aplica cuando en todos los términos de un polinomio figura uno o varios factores repetidos.

El resultado es el producto entre esos factores y el polinomio que resulta de dividir cada término por ese factor.

Para encontrar los factores repetidos procedemos de la siguiente manera:

• De los coeficientes se busca el máximo común divisor.

• De las letras se busca la que esté repetida en todos los términos con el menor exponente que figura en el polinomio.

Ejemplo 1: $P(x) = 3x^2 - 6x^4 + 9x^3 - 12x$

El máximo común divisor de los números es 3 y la letra repetida con el menor exponente es x, por lo tanto el factor común es 3x.

Luego:

$3x^2 - 6x^4 + 9x^3 - 12x = 3x.(x - 2x^3 + 3x^2 - 4)$

Ejemplo 2: $16x^2 + 8x^3 - 4x = 4x.(4x + 2x^2 - 1)$

1) Extrae factor común en cada uno de los siguientes polinomios:

a) $36x^2 - 27x^4 =$
b) $-12x^3 + 9x^2 - 6x =$
c) $18x^3 + 6x^2 + 9x =$
d) $12x^3 + 8x^2 - 20x =$
e) $3x^3 + 21x^4b + 18x^5 - 9x^6 =$
f) $5yx^8 + 10y^4x^5 + \frac{5}{2}y^3x^2 =$

Factor común por grupos de igual número de términos:

Para factorear un polinomio que tiene factores comunes en grupos de igual número de términos, se factorean dichos grupos y luego se factorean nuevamente con respecto a un nuevo factor común que aparece entre paréntesis.
Ejemplo:
$P(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$
Primero armamos los grupos (tomando aquellos términos que tengan algún factor en común) y los encerramos entre paréntesis:
$(x^4 - 3x^3) + (x - 3)$
En cada grupo sacamos factor común
$x^3(x - 3) + 1(x - 3)$
Volvemos a sacar factor común, ya que el paréntesis aparece en ambos términos:
$(x - 3).(x^3 + 1)$
Obteniendo así el resultado final: $x^4 - 3x^3 + x - 3 = (x - 3).(x^3 + 1)$

2) Extrae factor común por grupos:

a) $x^3 - 5x - 3x^2 + 15 =$

b) $12x^3 - 8x^2 - 3x + 2 =$

c) $10x^3 - 8x^2 + 15x - 12 =$

d) $24a^2x^5 + 18a^3x^4 - 30ax^2 =$

e) $a^2 + ab + ax + bx =$

f) $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2 =$

Trinomio cuadrado perfecto:

Sabemos que al resolver el cuadrado de un binomio se obtiene un trinomio llamado **trinomio cuadrado perfecto: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**

De acuerdo con la definición de cuadrado de un binomio resulta que en el trinomio cuadrado perfecto, dos de sus términos son cuadrados perfectos y el término restante es el doble producto de las bases de los cuadrados.

Si tenemos un polinomio de tres términos, y reconocemos en él el formato anterior, entonces se puede factorear escribiéndolo nuevamente como potencia

Ejemplo: $x^2 + 4x + 4$

Para factorearlo debemos reconocer en él, el formato del trinomio cuadrado perfecto:

$a^2 + 2ab + b^2$

Buscamos dos términos que sean cuadrados perfectos y le sacamos la raíz cuadrada

$a^2 = x^2$ entonces $a = x$

$b^2 = 4$ entonces $b = 2$

Verificamos ahora si el término restante es el doble producto de a por b:

$2\ a\ b = 2\ x\ 2 = 4x$

Esto significa que el polinomio dado sí tiene la forma de trinomio cuadrado perfecto, por lo tanto se puede factorear: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

3) Analiza si los siguientes trinomios son cuadrados perfectos. Si lo son, factorízalos.

a) $1 + 18x + 81x^2 =$

b) $\frac{4}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 1 =$

c) $9 - 30x + 25x^2 =$

d) $\frac{1}{9}x^2 + 16 + 8x =$

e) $\frac{9}{25} + 4x^4 - \frac{12}{5}x =$

f) $4x^2 + 4x + 1 =$

g) $\frac{1}{81}x^4 + \frac{2}{3}x^2 + 9 =$

Cuatrinomio cubo perfecto:

Recordemos que el cubo de un binomio da por resultado un cuatrinomio llamado cuatrinomio cubo perfecto: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Este caso es similar al anterior, sólo que el polinomio dado debe ser un cuatrinomio y el resultado del factoreo debe ser el cubo de un binomio.

Ejemplo:

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Debemos reconocer en el polinomio dado el formato $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ para ello buscamos dos términos que sean cubos perfectos y les sacamos la raíz cúbica

$a^3 = x^3$ entonces $a = \sqrt[3]{x^3} = x$

$b^3 = 8$ entonces $b = \sqrt[3]{8} = 2$

Verificamos ahora si los dos términos restantes responden al formato $3a^2b$ y $3ab^2$

$3a^2b = 3(x)^2 2 = 6x^2$

$3ab^2 = 3x(2)^2 = 12x$

Comprobamos que efectivamente sí tiene el formato indicado, por lo tanto:

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$

4) Analiza si los siguientes cuatrinomios son cubos perfectos. Si lo son, factorízalos.

a) $-x^3 - 9x^2 - 27x - 27 =$

b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 =$

c) $x^3 + 64 - 12x^2 - 48x =$

d) $\frac{27}{64}x^3 + \frac{27}{16}x^2 + \frac{9}{4}x + 1 =$

e) $\frac{1}{8} - \frac{9}{4}x + \frac{15}{2}x^2 - 125x^3 =$

Diferencia de cuadrados:

Recordemos que $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

Por el carácter recíproco de esta propiedad, si tenemos un binomio que tenga la forma $a^2 - b^2$ podemos factorearlo escribiendo $(a+b).(a-b)$

Ejemplo:

$P(x) = x^2 - 9$

Si $a^2 = x^2$ entonces $a = x$

$b^2 = 9$ entonces $b = 3$

este polinomio tiene la forma de diferencia de cuadrados por lo tanto su factorización es:

$x^2 - 9 = (x + 3).(x - 3)$

5) Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados:

a) $49x^2 - 100 =$

b) $x^8 - 1 =$

c) $(x + 1)^2 - 4 =$

d) $x^2 - 2 =$

e) $4x^2 - \frac{9}{25} =$

f) $16x^4 - 1 =$