



**INSTITUTO
BARRANQUERAS**
U.E.G.P N° 161

**Carrera: Tecnicatura Superior en Desarrollo en
Software**

Espacio Curricular: Análisis Matemático

Profesora: Melgarejo Gabriela

Curso: Segundo año

**Tema: LIMITE Indeterminaciones tipo $0/0$ y
 ∞/∞**

Límites indeterminados del Tipo 0/0

Una **indeterminación algebraica** se da cuando no es posible determinar el resultado.

Por ejemplo, en ciertas ocasiones, al calcular el límite de una función se puede obtener $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$a. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)} = \frac{0}{0}$$

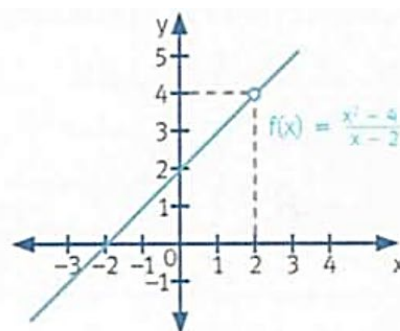
$$b. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}{\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x} - \sqrt{3})} = \frac{0}{0}$$

Para calcular el límite de una indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ en funciones racionales, se debe trabajar algebraicamente para poder simplificar la expresión y "levantar" así la indeterminación.

Se puede factorizar el numerador y el denominador y/o racionalizar la expresión. Es posible trabajar con expresiones equivalentes porque para obtener el límite no importa el valor en el punto.

2

$$a. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$



$$b. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{3})^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

Otro caso de indeterminación es: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \sin x}{\lim_{x \rightarrow 0} x} = \frac{0}{0}$

Se puede demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

El valor del límite anterior permite resolver otros límites con estructuras similares que producen la misma indeterminación.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cdot \sin(7x)}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} 7 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{7x} = 7 \cdot 1 = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot 1 = 1$$



Límites indeterminados Tipo ∞/∞

La indeterminación algebraica $\frac{\infty}{\infty}$ surge al calcular el límite de ciertas funciones racionales

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \wedge \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Para calcular este tipo de límites, se divide numerador y denominador de la función por x^n siendo n el mayor de los grados de ambos polinomios; se simplifica todo lo posible y luego se aplican las propiedades de los límites.

- El grado del polinomio numerador es igual al grado del polinomio denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 3x + 7}{2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2 + 3x + 7}{x^2}}{\frac{2x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{6 + 0 + 0}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3$$

- El grado del polinomio numerador es menor al grado del polinomio del denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 5x}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{2} = \frac{0 - 0}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

- El grado del polinomio es mayor al grado del polinomio denominador.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 + x - 8}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^4 + x - 8}{x^4}}{\frac{x^2 + 3x}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{x^3} - \frac{8}{x^4}}{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}} = \frac{5 + 0 - 0}{0 - 0} = \frac{5}{0} = \infty$$



Generalizando:

Sea $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} =$

Relación entre el grado de f(x) y el grado de g(x)	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
Grado f(x) = Grado g(x)	$\frac{\text{Coeficiente principal f(x)}}{\text{Coeficiente principal g(x)}}$
Grado f(x) < Grado g(x)	0
Grado f(x) > Grado g(x)	∞

VIDEOS PARA REFORZAR LA TEORIA

Solución de límites por factorización Introducción

<https://www.youtube.com/watch?v=kRaL0widcCY&list=PLeYSRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=6>

Solución de límites por factorización Ejemplo 1

<https://www.youtube.com/watch?v=h9IEAU5-CSg&list=PLeYSRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=7>

Solución de límites por factorización Ejemplo 2

https://www.youtube.com/watch?v=kO_D4w13vyg&list=PLeYSRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=8

Solución de límites por factorización Ejemplo 3

https://www.youtube.com/watch?v=-G00rN5_bXU&list=PLeYSRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=9

Solución de límites por factorización Ejemplo 4

<https://www.youtube.com/watch?v=yAy-cSuSKFc&list=PLeYSRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=10>



Solución de límites por factorización Ejemplo 5

<https://www.youtube.com/watch?v=hivb5XPiFxc&list=PLeYSRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=11>

Solución de límites por factorización Ejemplo 6

<https://www.youtube.com/watch?v=1Z6c7hr85bU&list=PLeYSRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=12>

5



TRABAJO PRACTICO CLASE N° 8

Calculen los siguientes límites.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x - 4}{x^3 + x} =$

b. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}} =$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 7x + 1}{x^2 + 3} =$

c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} =$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 14}{2 + x^2} =$

d. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2\sqrt{x} - 4}{x^2 - 16} =$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 - 2x + 6}{10x^3 + x - 6} =$



Una vez terminado el practico arma un archivo Word con el desarrollo o fotos, pero en los dos casos transformarlos en pdf luego subir a la plataforma ELE