



**INSTITUTO
BARRANQUERAS**
U.E.G.P N° 161

**Carrera: Tecnicatura Superior en Desarrollo en
Software**

Espacio Curricular: Algebra

Profesora: Melgarejo, Gabriela

Curso: Primer año

Tema de clase: DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

El determinante de una matriz, como resultado generara un escalar, el cual representa la singularidad de dicha matriz.

Dada la matriz A, su determinante esta denotado por: $\det(A)$.

Determinante por el método de COFACTORES de a_{ij}

Dada la matriz A_{33} , se define su determinante $\det(A)$ ó $|A|$ igual a un escalar, de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

Menor de $a_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ Por lo general las eliminaciones se hacen mentalmente.

Menor de $a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Cofactor de $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ (Menor de a_{ij})

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (A) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} &= a_{11} \left(\begin{matrix} \text{Cofactor} \\ \text{de } a_{11} \end{matrix} \right) + a_{12} \left(\begin{matrix} \text{Cofactor} \\ \text{de } a_{12} \end{matrix} \right) + a_{13} \left(\begin{matrix} \text{Cofactor} \\ \text{de } a_{13} \end{matrix} \right) \\ &= 2 \left((-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \right) + (-2) \left((-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) + 0 \\ &= (2)(1)[(1)(-1) - (-3)(2)] + (-2)(-1)[(-3)(-1) - (1)(2)] \\ &= (2)(5) + (2)(1) = \boxed{12} \end{aligned}$$

REGLA DE SARRUS

Solo para matrices de 3° orden

Dada la siguiente matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

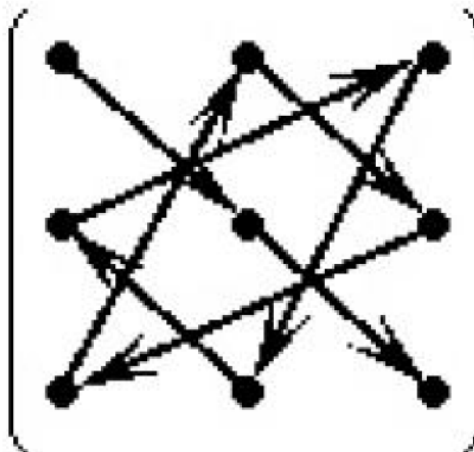
Sumandos positivos

Se obtienen multiplicando

- 1) Los elementos de la diagonal principal: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$
- 2) Los elementos de la línea paralela superior a la diagonal principal por el elemento aislado de la esquina inferior izquierda: $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$
- 3) Los elementos de la línea paralela inferior a la diagonal principal por el elemento aislado de la esquina superior derecha: $a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$

3

Representación Grafica de Sumandos Positivos

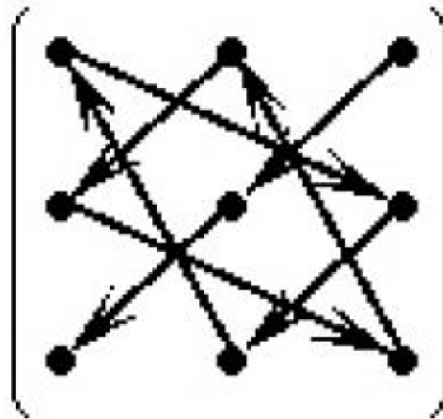


Sumandos negativos

Obtenemos al multiplicar

- 1) Los elementos de la diagonal secundaria: $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$
- 2) Los elementos de la línea paralela superior a la diagonal secundaria por el elemento aislado de la esquina inferior derecha: $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$
- 3) Los elementos de la línea paralela inferior a la diagonal secundaria por el elemento aislado de la esquina superior izquierda: $a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$

Representación Grafica de Sumandos Negativos



4

Y entonces $\det(A) =$

$$|A| = \text{Sumandos positivos} - \text{Sumandos negativos.}$$

Otra forma de aplicar la Regla de Sarrus

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Se agrega las dos primeras filas

Luego:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Se suman todos los productos de las diagonales principales



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Se suman todos los productos de las diagonales secundarias

5

Entonces nos quedaría:

Det (A) =

$$|A| = \sum \text{de los productos de las diag princ} - \sum \text{de los productos de las diag sec}$$

MATRIZ DE COFACTORES

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Bien, para ello debemos recordar el procedimiento de como obtener los cofactores.

Qué tiene la siguiente forma, recordemos que dentro de cada proceso hay una determinante de 2x2.

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Por lo que sabemos que tendremos que calcular un total de 9 determinantes, y cambiando el signo tal como aparece en la fórmula. Haremos todo el procedimiento paso a paso, de ahí en forma de tarea te encargarás de verificar el resultado, de tal manera que no haya problema para entender la solución del problema resuelto.

El primer valor (renglón 1, columna 1) sería:

$$+ \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-3)(1) - (2)(3) = -3 - 6 = -9$$

El segundo valor (renglón 1, columna 2) sería:

$$- \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -[(0)(1) - (2)(5)] = -(0 - 10) = 10$$

El tercer valor (renglón 1, columna 3) sería:

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = +[(0)(3) - (-3)(5)] = 0 + 15 = 15$$

El cuarto valor (renglón 2, columna 1) sería:

$$- \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -[(4)(1) - (3)(3)] = -(4 - 9) = -(-5) = 5$$

El quinto valor (renglón 2, columna 2) sería:

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = +[(2)(1) - (3)(5)] = (2 - 15) = -13$$

El sexto valor (renglón 2, columna 3) sería:

$$- \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -[(2)(3) - (4)(5)] = -(6 - 20) = -(-14) = 14$$

El séptimo valor (renglón 3, columna 1) sería:

$$+ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = +[(4)(2) - (3)(-3)] = +(8 + 9) = (17) = 17$$

El octavo valor (renglón 3, columna 2) sería:

$$- \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -[(2)(2) - (3)(0)] = -(4 - 0) = -(4) = -4$$

El noveno y último valor, (renglón 3, columna 3) sería:

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = + [(2)(-3) - (4)(0)] = +(-6 - 0) = -6$$

Ahora es momento de ordenar los resultados que hemos obtenido y por ahora deberías de tener algo así.

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} -9 & 10 & 15 \\ 5 & -13 & 14 \\ 17 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

7

Todo lo que hemos obtenido ha sido la matriz de cofactores de 3x3 recordemos que para obtener la matriz adjunta, necesitamos aplicar la transpuesta a ese resultado. Y es obligatorio, para poder confirmar que el procedimiento ha sido un éxito.

$$\text{adj } A = (\text{cof}(A))^T = \begin{pmatrix} -9 & 5 & 17 \\ 10 & -13 & -4 \\ 15 & -14 & -6 \end{pmatrix}$$

Con este procedimiento hemos calculado la matriz de cofactores.

VIDEOS PARA REFORZAR LA TEORIA

Determinante 3x3: Regla de Sarrus

<https://www.youtube.com/watch?v=DsgwgGmGkMo>

Determinante de una matriz de 3x3 Regla de Sarrus

<https://www.youtube.com/watch?v=8OnOZvc5rFQ>

TRABAJO PRACTICO N° 6

- 1) Hallar el determinante de las siguientes matrices utilizando el método de Cofactores.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & -2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -8 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

- 2) Hallar el determinante de las siguientes matrices utilizando la regla de Sarrus

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -7 \\ 3 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

8

- 3) Encontrar la matriz de cofactores de las siguientes matrices

$$A = \begin{vmatrix} -5 & 9 & -2 \\ 9 & -6 & 6 \\ -7 & 2 & 6 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -9 & 5 \\ -7 & 2 & 3 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} -5 & 6 & -5 \\ 0 & 3 & -4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$



Una vez terminado el practico arma un archivo Word con el desarrollo o fotos, pero en los dos casos transformarlos en pdf luego subir a la plataforma ELE