

2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS.

Una función se llama **logarítmica** si es de la forma $y = \log_a x$, donde la base a es un número real cualquiera positivo y distinto de 1.

- Nuevamente distinguimos dos casos:
- Base mayor que la unidad: $a > 1$.
 - Base positiva y menor que la unidad: $0 < a < 1$.

Funciones logarítmicas de base $a > 1$.

A continuación aparece una tabla de valores de la función $y = \log_2 x$. Para completar esta tabla con ayuda de la calculadora se utiliza la igualdad vista en la unidad 2, que permite cambiar de base los logaritmos:

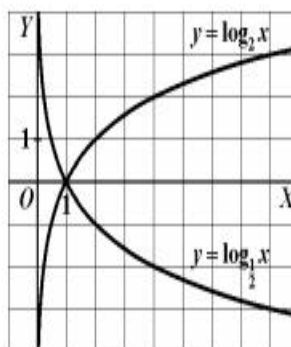
$$y = \log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$$

Por ejemplo: $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = 2'322$, $\log_2 17 = \frac{\log 17}{\log 2} = 4'087$, ...

x	...	-1	0	2^{-6}	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
$y = \log_2 x$	...	error	error	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log x}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log x}{\log 1 - \log 2} = \frac{\log x}{0 - \log 2} = -\frac{\log x}{\log 2}$$

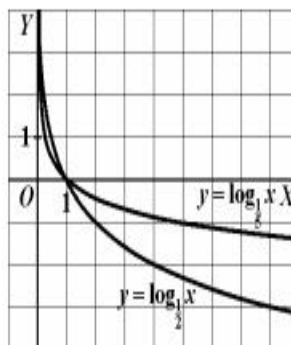
Por tanto, la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ es opuesta a $y = \log_2 x$, y su gráfica la obtenemos por simetría respecto del eje X .



La gráfica de la función $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ es análoga a la de la función $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Con ayuda de una calculadora construimos una tabla de valores para representar dicha función:

x	...	-1	0	5^{-6}	5^{-5}	5^{-4}	5^{-3}	5^{-2}	5^{-1}	1	5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6
$y = \log_{\frac{1}{5}} x$	...	error	error	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6

Representamos conjuntamente las funciones $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$:



Observando las gráficas anteriores, deducimos las propiedades de estas funciones.

La función *logarítmica* $y = \log_a x$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es el conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.
- La imagen es todo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
- Es continua en todo su dominio.
- Su gráfica corta al eje X en el punto $(1, 0)$ y pasa por el punto $(a, 1)$, pues $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.

Si la base $a > 1$:

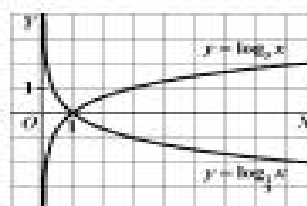
- Es **creciente** en todo su dominio.
- La función tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$, por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.
- La función tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.
- La función es negativa para valores de $x < 1$ y positiva para valores de $x > 1$.

Si la base $0 < a < 1$:

- Es **decreciente** en todo su dominio.
- La función tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow 0^+$, por tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.
- La función tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.
- La función es positiva para valores de $x < 1$ y negativa para valores de $x > 1$.

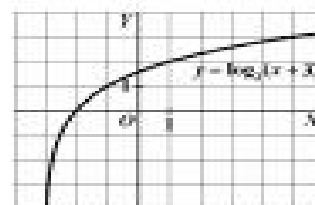
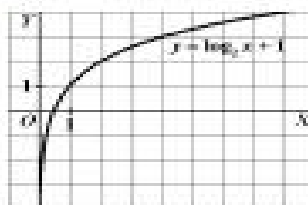
Ejemplo. Representa las funciones $y = \log_3 x$ y su opuesta $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

x	3^{-6}	3^{-5}	3^{-4}	3^{-3}	3^{-2}	3^{-1}	1	3	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
$y = \log_3 x$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6



Ejemplo. A partir de la gráfica de la función $y = \log_2 x$ representa las funciones $y = \log_2 x + 1$ e $y = \log_2(x+3)$.

- La función $y = \log_2 x + 1$ se obtiene trasladando verticalmente $y = \log_2 x$ una unidad hacia arriba.
- La función $y = \log_2(x+3)$ se obtiene trasladando horizontalmente $y = \log_2 x$ tres unidades a la izquierda.



EJERCICIOS

7. De todas las funciones logarítmicas tiene especial importancia aquellas en las que la base es 10 o el número e . Representas las funciones $y = \log x$ e $y = \ln x$.
8. Halla el dominio de las siguientes funciones.
- a) $y = \log x^2$ b) $y = \log(x^2 - 4)$ c) $y = \log(x^2 - 5x + 6)$
- d) $y = \log \sqrt{x^2 - 9}$ e) $y = \log \frac{x-1}{x+1}$
9. Halla el dominio y estudia la simetría de las siguientes funciones.
- a) $y = \log x^4$ b) $y = \ln |x|$
- Representálas gráficamente.
10. Escribe la expresión de la segunda función a partir de la primera y dibuja las gráficas de cada una de ellas.
- a) $y = \log_2 x$ $y = \log_4 x$
- b) $y = \log_5 x$ $y = \log_{25} x$
11. Dibuja la segunda función a partir de la primera.
- a) $y = \log_2 x$ $y = \log_2(x+2)$
- b) $y = \log_3 x$ $y = \log_3(x-2)$
12. Dibuja la segunda función a partir de la primera.
- a) $y = \log_3 x$ $y = 1 + \log_3 x$
- b) $y = \log_3 x$ $y = 2 + \log_5(x+2)$
- c) $y = \log_5 x$ $y = 1 + \log_5(x-2)$
13. Dibuja y relaciona las siguientes funciones.
- a) $y = \ln x$ b) $y = \ln x + 1$ c) $y = \ln(x+1)$ d) $y = 2 + \ln(x-3)$