

● **Propiedades de los logaritmos:**

1. Definición: $\text{Log}_a (b) = C \iff a^C = b$

Con $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 1 \wedge a > 0 \wedge b > 0$

✓ Ejemplo: $\log_2 (8) = 3 \iff 2^3 = 8$

2. El **logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos.**

$\text{Log}_a (X \cdot Y) = \text{Log}_a X + \text{Log}_a Y$

✓ Ejemplo:

$\log (5 \cdot 2) = \log (5) + \log (2)$

3. El **logaritmo de un cociente es la resta de los logaritmos.**

$\text{Log}_a \left(\frac{X}{Y} \right) = \text{Log}_a X - \text{Log}_a Y$

✓ Ejemplo:

$\log (5/2) = \log (5) - \log (2)$

4. El **logaritmo de una potencia: El exponente pasa a multiplicar como una constante al logaritmo.**

$\text{Log}_a X^Y = Y \cdot \text{Log}_a X$

El exponente "BAJA" y queda multiplicando al logaritmo.

✓ Ejemplo:

$\log (10)^2 = 2 \cdot \log (10)$

Nota: al logaritmo de una raíz lo puedo ver como el logaritmo de una potencia fraccionaria.

Ejemplos: $\text{Log}_a X^3 = 3 \cdot \text{Log}_a X$

$\text{Log}_a (X+1)^{3a} = 3a \cdot \text{Log}_a (X+1)$

$\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \log 7$

$\log_a \sqrt[3]{(5X+1)^2} = \frac{2}{3} \log_a (5X+1)$

● **Cambios de base:**

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Con "a" y "c" $\in \mathbb{R} \wedge "a" \wedge "c" > 0$

Para pasar un logaritmo de base, hago el logaritmo en "base c" de lo que tenía adentro del logaritmo, dividido el logaritmo en "base c" de la base.

✓ Ejemplo:

$\log_3 5 = \frac{\log_c 5}{\log_c 3}$

● **Las calculadoras:** Con las calculadoras sólo puedo calcular en forma directa dos tipos de logaritmos:

- Los de base 10: La tecla "Log" (cuando no se aclara la base de un logaritmo es de base 10).
- Los de base 2,71 "base e" que se llaman logaritmos naturales o neperianos. En la calcu están como "ln".

Pero esto no significa que yo no pueda calcular el logaritmo de base 7 de 4 con la calculadora.

Veamos como ejemplo dos maneras de hacer **Log₇ (4)** con la calculadora:

Paso a base 10	Paso a base "e"
$\log_7 (4) = \frac{\log 4}{\log 7} = \frac{0,602}{0,845} = 0,712$	$\log_7 (4) = \frac{\ln 4}{\ln 7} = \frac{1,386}{1,945} = 0,712$

Otros ejemplos de cambio de base: $\log_{\left(\frac{3}{5}\right)} (X+2) = \frac{\ln (X+2)}{\ln \left(\frac{3}{5}\right)}$

$\log_{(x+1)} (3X+2) = \frac{\log (3X+2)}{\log (X+1)}$

Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que ocurre un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar x , se escribe la ecuación en forma exponencial.

$$x + 2 = 2^5 \quad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \quad \text{Despejar } x$$

Otra forma de considerar el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \quad \text{Elevar 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \quad \text{Propiedad de los logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \quad \text{Despejar } x$$

El método empleado para resolver este problema es característico. Se resumen los pasos como sigue.

Normas para resolver ecuaciones logarítmicas

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; podría ser necesario combinar primero los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o eleve la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

Ejemplo 6 Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación despeje x .

a) $\ln x = 8$ b) $\log_2(25 - x) = 3$

Solución

a) $\ln x = 8$ Ecuación dada
 $x = e^8$ Forma exponencial

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

Este problema se puede resolver también de otra forma:

$\ln x = 8$ Ecuación dada
 $e^{\ln x} = e^8$ Eleve e a cada lado
 $x = e^8$ Propiedad de $\ln$

b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$\log_2(25 - x) = 3$ Ecuación dada
 $25 - x = 2^3$ Forma exponencial (o elevar 2 a cada lado)
 $25 - x = 8$
 $x = 25 - 8 = 17$

Compruebe su respuesta

Si $x = 17$, se obtiene

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✓

Ejemplo 7 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3 \log(2x) = 16$.

Solución Se aísla primero el término logarítmico. Esto permite escribir la ecuación en forma exponencial.

Compruebe su respuesta

Si $x = 5000$, se obtiene

$4 + 3 \log 2(5000) = 4 + 3 \log 10\,000$
 $= 4 + 3(4)$
 $= 16$ ✓

$4 + 3 \log(2x) = 16$ Ecuación dada
 $3 \log(2x) = 12$ Reste 4
 $\log(2x) = 4$ Divida entre 3
 $2x = 10^4$ Forma exponencial (o eleva 10 a cada lado)
 $x = 5000$ Divida entre 2