



Ministerio de
Educación, Cultura,
Ciencia y Tecnología
Unico Gobierno de todos

Subsecretaría de Fortalecimiento
de Trayectorias Estudiantiles



UNIVERSIDAD
TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL
RESISTENCIA

Secretaría de Políticas
Universitarias



Ministerio de Educación
Argentina

INTRODUCCIÓN A LA INGENIERÍA

MÓDULO FÍSICA

TEMA 2

Vectores



TEMA 2: VECTORES

Las *magnitudes vectoriales* son aquellas que quedan completamente determinadas cuando se conoce, además de su valor numérico, su punto de aplicación (origen), y la dirección y el sentido en que actúan.

Ejemplos: el peso, la velocidad, el desplazamiento, la aceleración, la fuerza, etc....

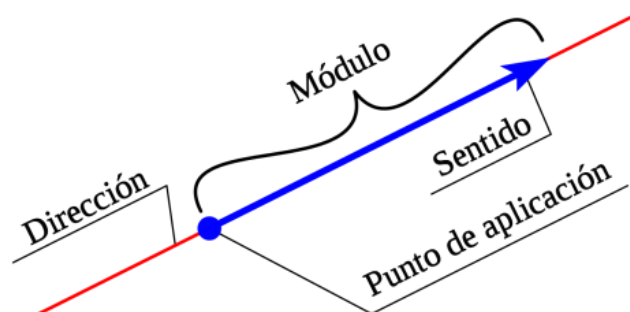
Representación de una magnitud vectorial, de un vector.

Una magnitud vectorial se representa gráficamente mediante un segmento orientado, con las siguientes características:

- **Punto de aplicación:** es el lugar donde se aplica o actúa el vector y coincide con el origen del segmento orientado.
- **Módulo:** es el valor numérico de la magnitud, la cantidad de veces que contiene a la correspondiente unidad. Por tanto, el módulo de una magnitud vectorial siempre va a acompañado de su unidad. El módulo de un vector siempre es positivo.

En la representación de un vector, el módulo es la distancia entre el origen y el extremo del segmento orientado.

- **Dirección:** es la línea recta que contiene al vector.
- **Sentido:** una dirección tiene dos sentidos. El sentido de un vector se representa mediante una punta de flecha en el extremo del vector opuesto al punto de aplicación.



Para escribir una magnitud vectorial se suele recurrir a dibujar una flecha encima de la letra que representa la magnitud. Muchos textos también recurren a escribir la letra en negrita.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{velocidad} &\rightarrow \vec{v} \quad \text{o bien} \quad v \\ \text{fuerza} &\rightarrow \vec{F} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{F} \\ \text{desplazamiento} &\rightarrow \Delta\vec{x} \quad \text{o bien} \quad \Delta x \end{aligned}$$

Cuando escribimos la letra o el símbolo de una magnitud vectorial sin la flecha (ni negrita), nos estamos refiriendo a su módulo. Muchos textos recurren también, para escribir el módulo, a poner la letra de la magnitud entre dos barras líneas verticales (valor absoluto). Con los ejemplos anteriores:

$$\begin{aligned} \text{velocidad (módulo)} &\rightarrow |\vec{v}| \quad \text{o bien} \quad v \\ \text{fuerza (módulo)} &\rightarrow |\vec{F}| \quad \text{o bien} \quad F \\ \text{desplazamiento (módulo)} &\rightarrow |\Delta\vec{x}| \quad \text{o bien} \quad \Delta x \end{aligned}$$

Representación de la fuerza peso en dos piedras que caen libremente, la primera de 2 kg de masa y la segunda de 4 kg.

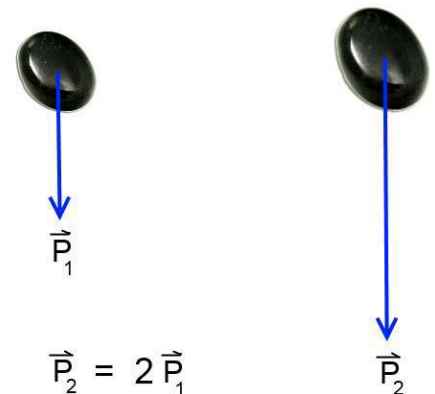
Solución:

La fuerza peso es un vector cuya dirección es la línea de unión entre el centro de masas de cada una de las piedras y el centro de la Tierra. El sentido de cada vector será el que marque hacia dónde va dirigida la fuerza (hacia el centro de la Tierra). El punto de aplicación de cada vector será en el centro de masas de cada piedra. Finalmente, el módulo del vector vendrá dado por el valor del peso en cada caso.

$$P_1 = m_1 \cdot g = 2kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 19,6 N$$

$$P_2 = m_2 \cdot g = 4kg \cdot 9,8 \frac{m}{s^2} = 39,2 N$$

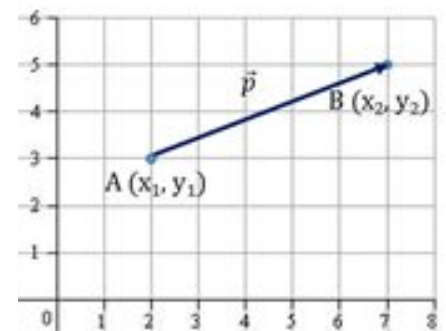
Como vemos, el módulo del peso en la piedra 2 es el doble que en la piedra 1. Por tanto, el vector peso en la piedra 2 debería ser el doble de largo que en la piedra 1.



Resumiendo

Un vector es un segmento orientado.

Un vector $\overrightarrow{AB}$ queda determinado por dos puntos, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$
Origen A y extremo B.

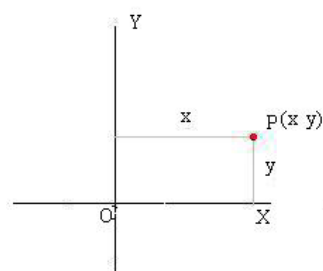


Sistema de referencia.

Vectores unitarios.

Para determinar el origen, extremo, dirección y sentido de un vector se precisa referirlo a un sistema de referencia. Un sistema de referencia espacial son tres ejes de coordenadas cartesianos, que se cortan en un punto llamado origen de coordenadas.

En este sistema de referencia espacial (**tridimensional**) la localización de un punto queda determinada por tres coordenadas (x, y, z). Pero si el sistema de referencia es plano (**bidimensional**) es suficiente con dos coordenadas (x, y). Por último, si el sistema de referencia es lineal (**una dimensión**), basta con una coordenada (x).

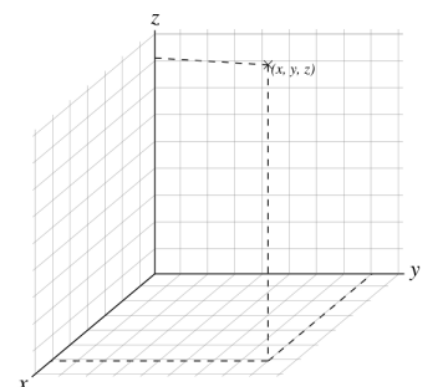


Sistema de referencia bidimensional.

Un punto en el plano queda determinado por dos números (coordenadas), (x ; y)



Sistema de referencia tridimensional. Un punto en el espacio queda determinado por tres números (coordenadas), (x ; y ; z)



Para trabajar con magnitudes vectoriales en un sistema de referencia espacial es necesario definir tres vectores unitarios. Los vectores unitarios son:

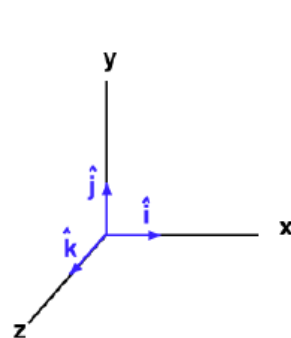
- ✓ Vectores de modulo unidad.
- ✓ Su punto de aplicación es el origen de coordenadas.
- ✓ Su dirección es el de los ejes cartesianos.
- ✓ Su sentido es el positivo del eje cartesiano.

Se escriben, dependiendo del texto que se consulte, de la siguiente forma:

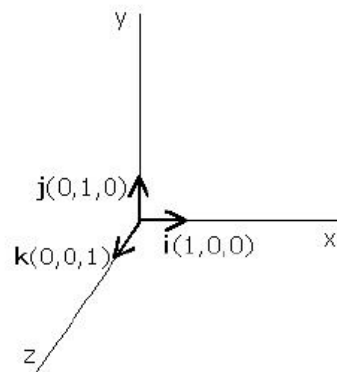
$$\text{vector unitario del eje } x \rightarrow \vec{u}_x = \vec{i} = \hat{i}$$

$$\text{vector unitario del eje } y \rightarrow \vec{u}_y = \vec{j} = \hat{j}$$

$$\text{vector unitario del eje } z \rightarrow \vec{u}_z = \vec{k} = \hat{k}$$



Vectores unitarios



Los vectores unitarios tienen por módulo la unidad. Las coordenadas aquí representadas lo son del extremo de cada unitario

Definición algebraica de un vector (módulo o norma de un vector)

Un vector $\vec{v}$ en el plano xy es un par ordenado de números reales (a, b) . Los números a y b se denominan elementos o componentes del vector $\vec{v}$. El vector cero es el vector de componentes $(0, 0)$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Módulo o norma de $\vec{v}$

Los vectores pueden clasificarse en:

Vector unitario o versor: es aquel vector cuyo módulo es 1 o sea $|\vec{v}| = 1$. Ejemplo: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Vector nulo: es aquel cuyo origen y extremo coinciden y, por lo tanto, tiene módulo cero. Lo simbolizaremos: $\vec{0}$

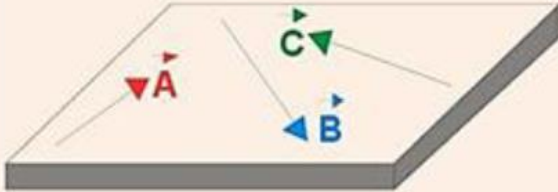
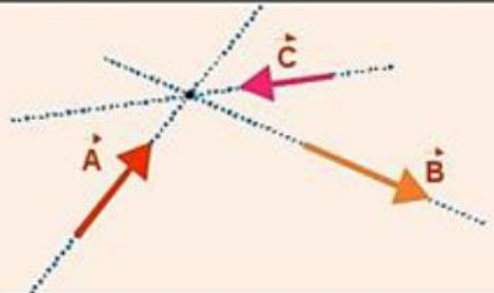
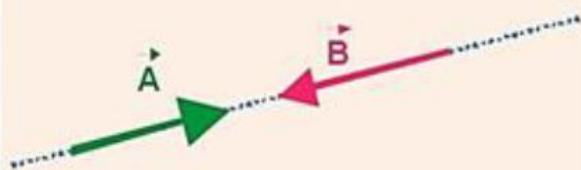
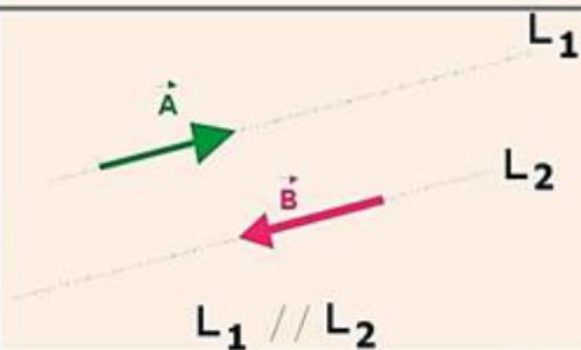
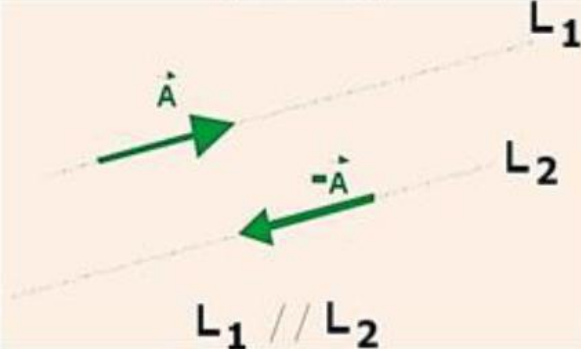
Vectores equivalentes: Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Todos ellos se llaman representantes de un único vector. Llamaremos representante canónico a aquel vector que tiene por origen el punto O.

Vectores fijos o ligados: Cuando están aplicados a un determinado punto.

Vectores libres: Es el conjunto de vectores que son equivalentes entre sí. Un vector LIBRE representa un conjunto de vectores fijos con igual módulo, dirección y sentido.

Vectores axiales (también conocidos como pseudovectores): son aquellos cuya dirección señala un eje de rotación, es decir, que están ligados a un efecto de giro.

Otros tipos de vectores son:

TIPO	CARACTERÍSTICA	ILUSTRACIÓN
VECTORES COPLANARES	Son aquellos que se encuentran contenidos en un mismo plano	
VECTORES CONCURRENTES	Son aquellos vectores cuyas líneas de acción concurren en un punto común	
VECTORES COLINEALES	Son aquellos vectores que se encuentran en una misma línea de acción	
VECTORES PARALELOS	Son aquellos vectores que tienen líneas de acción paralelas	
VECTORES OPUESTOS	Son aquellos vectores paralelos y/o colineales que tienen el mismo módulo y sentido Opuestos	

VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO.

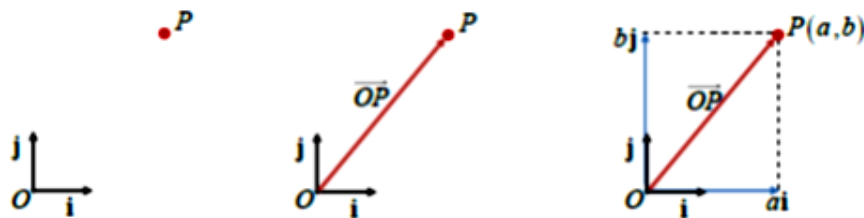
• Vectores en el plano.

En $\mathbb{R}^2$ existen dos vectores particulares que nos permiten representar otros vectores en el plano. Se denota el vector horizontal $(1,0)$ por el símbolo $\vec{i}$ y el vector vertical $(0,1)$ por el símbolo $\vec{j}$.

Este sistema **de referencia** para el plano consiste en el conjunto formado por un punto fijo, llamado **origen**, y por una **base** $(\vec{i}, \vec{j})$ para los vectores. Habitualmente se toma una **base ortonormal** (dos vectores unitarios y perpendiculares).

En este caso se habla del sistema de referencia habitual y tenemos que, $\vec{i} = (1; 0), \vec{j} = (0; 1)$. Entonces, a cada punto P del plano, se le asocia un vector fijo $\overrightarrow{OP}$, llamado **vector de posición** del punto P .

Como $(\vec{i}, \vec{j})$ es una base, el vector de posición $\overrightarrow{OP}$ tendrá unas coordenadas respecto de la base:



Cualquier vector (a,b) del plano será: $(a, b) = a(1,0) + b(0,1)$

y lo podremos escribir: $\vec{v} = (a, b) = a\vec{i} + b\vec{j}$

De esta forma descomponemos el vector $\vec{v}$ en sus componentes horizontales y verticales.

Los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ tienen las siguientes propiedades:

- Son vectores linealmente independientes
- Cualquier vector en $\mathbb{R}^2$ puede escribirse en términos de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

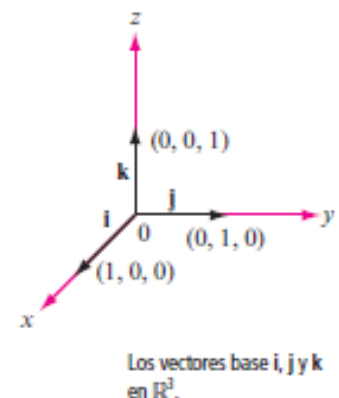
• Vectores en el espacio

Todo punto del plano se puede representar como un par ordenado de números reales, de igual manera un punto en el espacio se puede representar por una terna ordenada de números reales.

Una terna (a, b, c) es un punto de $\mathbb{R}^3$, para representarlo consideramos tres rectas perpendiculares entre sí en un punto, que determinan los ejes x, y, z denotando respectivamente los vectores unitarios: $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$

Cualquier vector (a, b, c) lo podremos escribir:

$$\vec{v} = (a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$



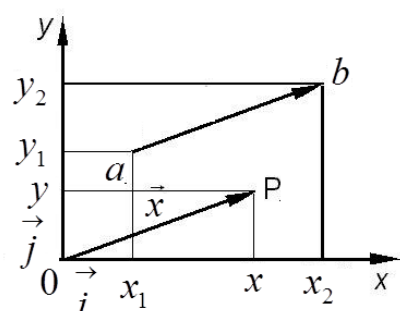
• Vector expresado según sus componentes

Tenemos un sistema cartesiano de base $(\vec{i}, \vec{j})$

$$\text{Dado } \overrightarrow{ab} = \begin{cases} a = (x_1, y_1) \\ b = (x_2, y_2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{op} = \overrightarrow{ab} = \begin{cases} O = (0,0) \\ x = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (x, y) \end{cases}$$

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



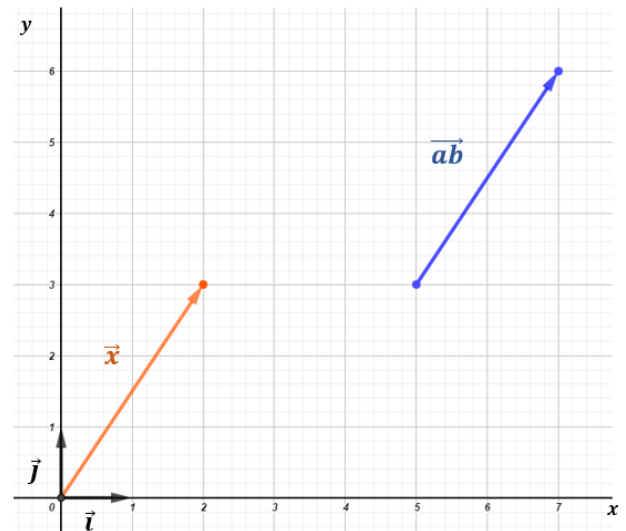
Ejemplo:

Representar el vector $\overrightarrow{ab}$ en un sistema cartesiano de base $(\vec{i}, \vec{j})$ y expresarlo según sus componentes.

$$\overrightarrow{ab} = \begin{cases} a = (5, 3) \\ b = (7, 6) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{op} = \vec{x} = \begin{cases} o = (0, 0) \\ x = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\ = (x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_2 - x_1 = 7 - 5 = 2 \\ y = y_2 - y_1 = 6 - 3 = 3 \end{cases} \vec{x} = (2, 3) \rightarrow \vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$



OPERACIONES CON VECTORES LIBRES

Suma de vectores: $\vec{u} + \vec{v}$

Método analítico:

La suma de dos o más vectores es otro vector donde sus componentes son el resultado de las sumas de los componentes análogos de cada vector.

Sean los vectores:

$$\vec{u} = (u_x; u_y)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x; u_y) + (v_x; v_y)$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x; u_y + v_y)$$

Ejemplo:

Sean:

$$\vec{u} = (5; 3)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (5; 3) + (-2; 4)$$

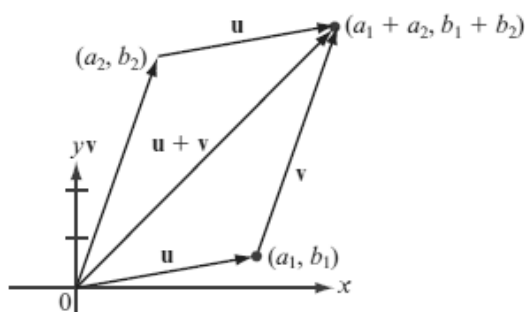
$$\vec{v} = (-2; 4)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (5 - 2; 3 + 4)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (3; 7)$$

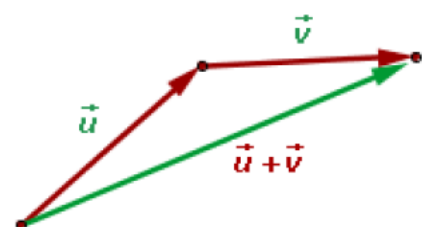
Método gráfico:

Para sumar dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo final de uno coincida con el extremo origen del otro vector.



Regla del paralelogramo

Regla de la poligonal



Se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores.

Resta de dos vectores: $\vec{u} - \vec{v}$

Restar dos vectores es lo mismo que sumar al primer vector el opuesto del segundo.

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Método analítico:

Sean los vectores:

$$\vec{u} = (u_x; u_y)$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (u_x; u_y) + (-v_x; -v_y)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x; u_y - v_y)$$

Ejemplo:

Sean:

$$\vec{u} = (5; 3)$$

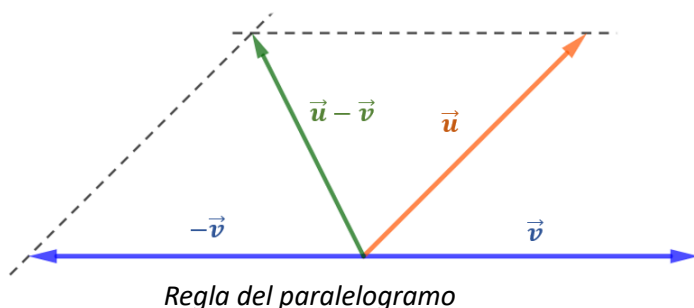
$$\vec{v} = (-2; 4)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (5; 3) - (-2; 4) = (5; 3) + (2; -4)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (5 + 2; 3 - 4)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (7; -1)$$

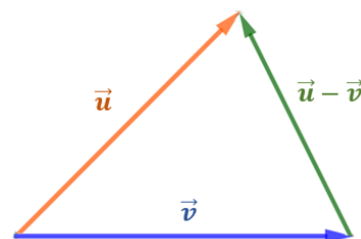
Método gráfico:



En la regla del paralelogramo se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se representa el vector opuesto y se procede de la manera anteriormente detallada.

En la regla de la poligonal, para restar dos vectores libres $\vec{u} - \vec{v}$ se escogen como representantes dos vectores con el origen en común, el vector resultante inicia en el final de $\vec{v}$ y termina en el final de $\vec{u}$. Es de interpretación que si operamos $\vec{v} - \vec{u}$ cambia el sentido del vector

Regla de la poligonal



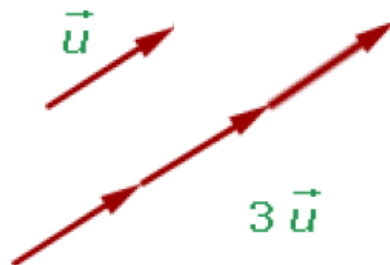
Producto de un número por un vector: $k \cdot \vec{u}$

Dado: $k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ y $\vec{u}$

Entonces: $k \cdot \vec{u} = \underbrace{(\vec{u} + \vec{u} + \dots + \vec{u})}_{k \text{ veces}}$

El producto de un número k por un vector $\vec{u}$ es otro vector:

- De igual dirección que el vector $\vec{u}$
- Del mismo sentido que el vector $\vec{u}$ si k es positivo.
- De sentido contrario del vector $\vec{u}$ si k es negativo.
- De módulo $|k||\vec{u}|$



Casos particulares:

- 1) $k = 0 \rightarrow 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$
- 2) $\vec{u} = \vec{0} \rightarrow k \cdot \vec{0} = \vec{0}$
- 3) $k = 1 \rightarrow 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

- 4) $k = -1 \rightarrow -1 \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ se llama **vector opuesto** de $\vec{u}$
- 5) $k > 0 \rightarrow k \cdot \vec{u} = \vec{v}$
 $k < 0 \rightarrow k \cdot \vec{u} = -\vec{v}$

Producto escalar entre dos vectores: $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuyos módulos son $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$, $\hat{\varphi}$ es el ángulo comprendido entre ellos.

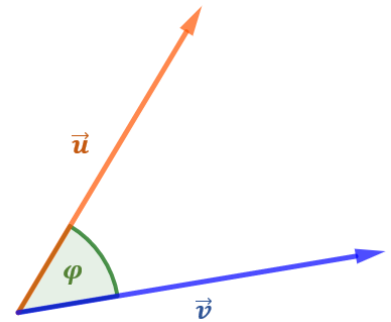
Definición:

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el **número real** que se obtiene multiplicando sus módulos por el coseno del ángulo $\hat{\varphi}$ que forman.

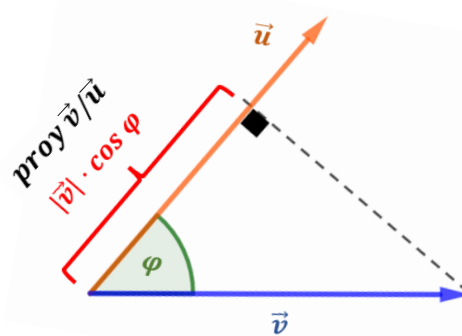
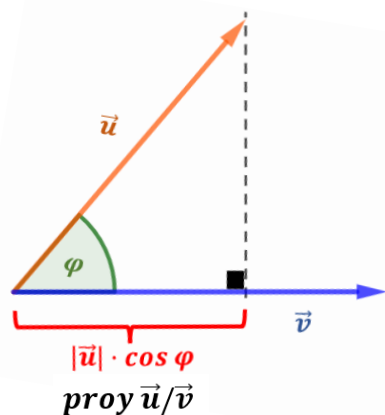
(Aclaración: $0^\circ \leq \hat{\varphi} \leq 180^\circ$)

En símbolos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \hat{\varphi}$$

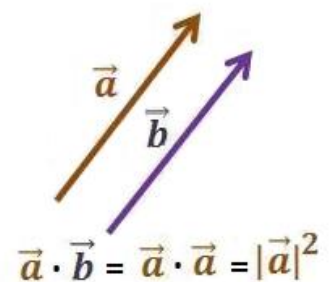
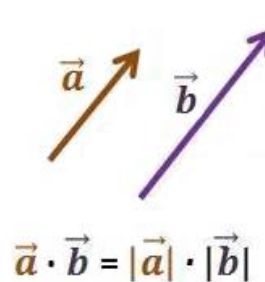


También podemos decir que, el **producto escalar** de dos vectores es igual al **módulo de un vector** por la **proyección** del otro sobre él. Esta proyección se puede ver en las siguientes figuras:

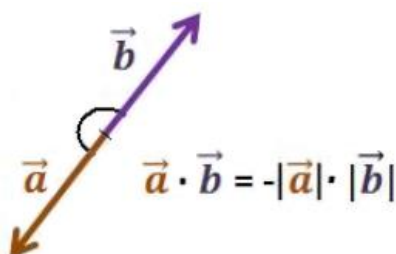


Propiedades del producto escalar:

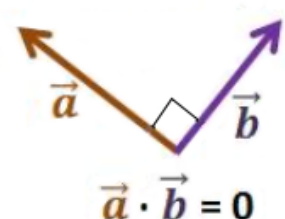
- Si los dos vectores tienen la **misma dirección y sentido**, el ángulo $\hat{\varphi} = 0^\circ$ por lo tanto, el producto escalar será el producto de sus módulos ($\cos 0^\circ = 1$)



- Si los dos vectores tienen la **misma dirección, pero sentido opuesto**, el ángulo $\hat{\varphi} = 180^\circ$ por lo tanto, el producto escalar será el producto de sus módulos con signo contrario ($\cos 180^\circ = -1$).



- Si los dos **vectores** son **perpendiculares**, el ángulo $\hat{\varphi} = 90^\circ$ por lo tanto, el producto escalar será nulo ($\cos 90^\circ = 0$).



Además, el producto escalar cumple las siguientes propiedades:

- **Propiedad asociativa:**

$$k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v})$$

- **Propiedad conmutativa:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- **Propiedad distributiva:**

$$\vec{r} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{r} \cdot \vec{u} + \vec{r} \cdot \vec{v}$$

Otra forma de calcular el producto escalar:

Sean los vectores en $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{u} = (u_x; u_y)$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y)$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

El producto escalar de dos vectores dados en coordenadas cartesianas es igual a la suma de los productos de las componentes homólogas.

A tener en cuenta:

Al **sumar** o **restar** vectores o al **multiplicar un vector por un escalar** (número), nos da como resultante **otro vector**.

Al realizar el **producto escalar** o también llamado **producto punto** entre dos vectores, nos da como resultado **un escalar** es decir solo **un número real**.

Aplicaciones del producto escalar en la física:

Se aplica en el cálculo del trabajo (magnitud escalar) que realiza una fuerza (vectorial) al realizar un desplazamiento (vectorial).

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\varphi$$

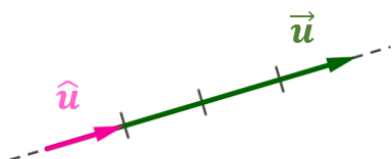
Se aplica en el cálculo de la potencia mecánica (escalar) relacionado a la velocidad (vectorial) que se aplica una fuerza (vectorial):

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\varphi$$

Y en estudios avanzados se encontrarán con cálculos de flujos de campos vectoriales a través de una superficie. Estos campos pueden ser el electrostático o el de inducción magnética.

Vector unitario: $\hat{u}$

Sea $\vec{u}$ un vector diferente de cero, dicho vector tiene alguna magnitud, dirección y sentido. En muchas ocasiones por razones de simplificación de cálculos, es necesario generar a otro vector que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{u}$, pero con magnitud uno, es decir un **vector unitario**. El procedimiento para calcularlo se denomina **normalización de un vector**. En síntesis, cuando se nos pide **normalizar un vector**, debemos calcular su **vector unitario**.



En este ejemplo gráfico, $\vec{u}$ es un vector de módulo 4 unidades, en él se representa su vector unitario $\hat{u}$ de módulo 1 unidad.

$$|\vec{u}| = 4$$

$$|\hat{u}| = 1$$

Nota: Usamos la notación (^) o «sombrero» sobre la letra que representa a los vectores unitarios. Esto nos permite distinguirlos de los vectores comunes. En los libros de textos se encontrarán con varias maneras de expresarlos, no obstante solo queda identificarlos de la mejor manera.

• **Normalización de un vector**

Normalizar, consiste en tomar a un vector $\vec{u}$ distinto de cero, y con él obtener un vector $\hat{u}$, de la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ pero con magnitud uno.

El procedimiento es el de dividir al vector $\vec{u}$ por su módulo $|\vec{u}|$, esto implica que cada componente del vector original debe ser dividido por el módulo correspondiente, logrando así el vector unitario $\hat{u}$

$$\vec{u} = (u_x; u_y) \qquad \hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(u_x; u_y)}{|\vec{u}|} = \left(\frac{u_x}{|\vec{u}|}; \frac{u_y}{|\vec{u}|} \right)$$

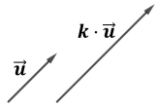
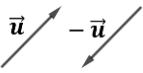
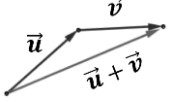
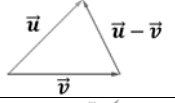
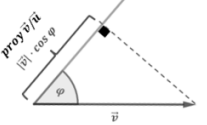
Ejemplo:

Dado el vector $\vec{r} = (3; 4)$, hallar un **vector unitario** de su misma dirección y sentido.

1º Calculamos su módulo	$ \vec{r} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
2º Presentamos el modelo matemático y operamos	$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{ \vec{r} } = \frac{(r_x; r_y)}{ \vec{r} }$
	$\hat{r} = \frac{(3; 4)}{5} = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right)$
3º Expresamos el vector unitario	$\hat{r} = (0,6; 0,8)$
4º Comprobamos su módulo:	$ \hat{r} = \sqrt{0,6^2 + 0,8^2} = \sqrt{1} = 1$

Nota: La expresión final de los resultados quedan a cargo de las indicaciones de sus docentes de cátedras. Estas pueden ser en fracción, decimal (redondeado), o expresión exacta. Siempre consultar esta cuestión.

Resumiendo

Objeto	Definición intuitiva	Expresión en términos de sus componentes
Vector $\vec{u}$	Objeto con módulo, dirección y sentido	$\vec{u} = (u_x; u_y) = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j}$
$ \vec{u} $	Módulo, magnitud o longitud de $\vec{u}$	$ \vec{u} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$
$k \cdot \vec{u}$	 En esta gráfica $k=2$	$k \cdot \vec{u} = (ku_x; ku_y) = ku_x \mathbf{i} + ku_y \mathbf{j}$
$-\vec{u}$		$-\vec{u} = (-u_x; -u_y) = -u_x \mathbf{i} - u_y \mathbf{j}$
$\vec{u} + \vec{v}$		$\begin{aligned} &= (u_x + v_x; u_y + v_y) \\ &= (u_x + v_x) \mathbf{i} + (u_y + v_y) \mathbf{j} \end{aligned}$
$\vec{u} - \vec{v}$		$\begin{aligned} &= (u_x - v_x; u_y - v_y) \\ &= (u_x - v_x) \mathbf{i} + (u_y - v_y) \mathbf{j} \end{aligned}$
$\vec{u} \cdot \vec{v}$		$\begin{aligned} &= \vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos \phi \\ &= u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y \end{aligned}$
$\hat{u}$	Vector unitario	$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{ \vec{u} } = \frac{(u_x; u_y)}{ \vec{u} } = \left(\frac{u_x}{ \vec{u} }; \frac{u_y}{ \vec{u} } \right)$

Descomposición y composición de vectores:

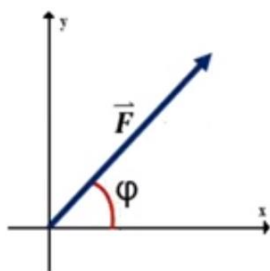
En física es muy común descomponer los vectores para realizar las operaciones de manera más sencillas, en particular cuando el problema implica el uso de varios vectores y luego componerlos.

Para realizar las descomposiciones y composiciones se utilizan los conceptos de **relaciones trigonométricas** y teoremas estudiados en la **resolución de triángulos rectángulos**.

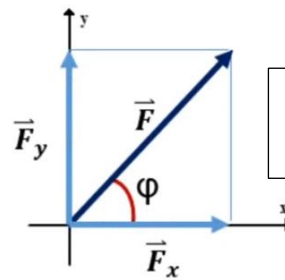
Descomposición:

La descomposición de vectores en componentes rectangulares consiste en hallar las proyecciones de un vector sobre sus dos ejes cartesianos. Es decir que se transforma un vector en otros dos que se encuentren sobre los ejes y que sumados dan el vector original.

- **Método grafico:**



Vector $\vec{F}$ cuyo punto de aplicación se ha colocado en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas



$\vec{F}$ queda descompuesto en sus componentes $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$

12

La descomposición gráfica, coincide con lo expuesto en el tema **vector expresado según sus componentes** de la pag. 6, en el mismo se utilizó un sistema cartesiano de base $(\vec{i}, \vec{j})$

- **Método analítico:**

Debido a que entre los vectores y los ejes se forman triángulos rectángulos, descomponer un vector consiste en hallar dos catetos a partir del valor de la hipotenusa (módulo del vector) y de algún ángulo. Por lo tanto, para llevar a cabo la descomposición se aplican relaciones trigonométricas.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{F}_x}{|\vec{F}|} \Rightarrow \vec{F}_x = |\vec{F}| \cdot \cos \varphi \quad \text{sen } \varphi = \frac{\vec{F}_y}{|\vec{F}|} \Rightarrow \vec{F}_y = |\vec{F}| \cdot \text{sen } \varphi$$

Recordando que: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$

Composición:

Es el proceso inverso al anterior, en este caso tenemos las componentes rectangulares y debemos conformar un vector resultante del cual calcularemos su módulo y su ángulo director.

- **Método grafico:**

Usamos las reglas del paralelogramo o de la poligonal, vistos en el tema *suma de vectores de pág. 7*

- **Método analítico:**

El módulo se calcula como lo visto anteriormente

$$|\vec{F}| = \sqrt{\vec{F}_x^2 + \vec{F}_y^2}$$

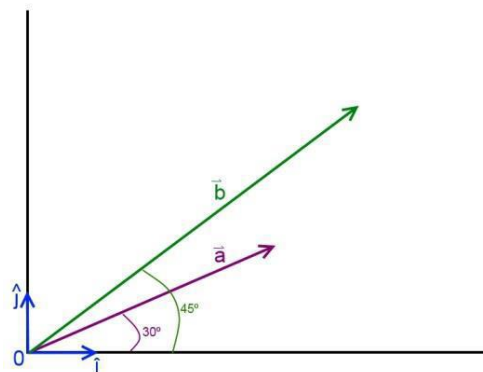
El ángulo director, utilizando razones trigonométricas

$$\text{tg } \varphi = \frac{\vec{F}_y}{\vec{F}_x} \Rightarrow \varphi = \text{tg}^{-1} \frac{\vec{F}_y}{\vec{F}_x}$$

La utilización de las componentes cartesianas permite operar vectores analíticamente, sin necesidad de recurrir a la geometría.

Ejemplos generales de problemas con vectores:

- El vector $\vec{a}$ tiene de módulo 5 unidades y forma un ángulo de 30° con el semieje X positivo, y el vector $\vec{b}$ forma un ángulo de 45° con dicho eje y vale 8 unidades.
Dibuja ambos vectores, determina las componentes cartesianas de dichos vectores, así como el vector suma $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$ y su módulo; diferencia, $\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$ y su módulo; el vector $2\vec{a}$; el vector $-\frac{1}{2}\vec{b}$; y su producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$



- Calculamos las componentes de cada vector:

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos 30^\circ = 5 \cdot \cos 30^\circ = 4,33 \text{ u}$$

$$a_y = |\vec{a}| \cdot \sin 30^\circ = 5 \cdot \sin 30^\circ = 2,50 \text{ u}$$

$$b_x = |\vec{b}| \cdot \cos 45^\circ = 8 \cdot \cos 45^\circ = 5,66 \text{ u}$$

$$b_y = |\vec{b}| \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot \sin 45^\circ = 5,66 \text{ u}$$

- Presentamos los vectores según sus componentes:

$$\vec{a} = (4,33 ; 2,50) \quad \vec{b} = (5,66 ; 5,66)$$

- Calculamos $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{S} = (4,33 ; 2,50) + (5,66 ; 5,66)$$

$$\vec{S} = (10 ; 8,16)$$

Su módulo:

$$|\vec{S}| = \sqrt{10^2 + 8,16^2} = 12,91 \text{ u}$$

- Calculamos $\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$

$$\vec{D} = (4,33 ; 2,50) - (5,66 ; 5,66)$$

$$\vec{D} = (-1,33 ; -3,16)$$

Su módulo:

$$|\vec{D}| = \sqrt{(-1,33)^2 + (-3,16)^2} = 3,43 \text{ u}$$

- Calculamos el vector $2\vec{a}$

$$2\vec{a} = 2 \cdot (4,33 ; 2,50)$$

$$2\vec{a} = (8,66 ; 5)$$

- Calculamos el vector $-\frac{1}{2}\vec{b}$

$$-\frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2} \cdot (5,66 ; 5,66)$$

$$-\frac{1}{2}\vec{b} = (-2,83 ; -2,83)$$

- Calculamos el producto escalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (4,33 ; 2,50) \cdot (5,66 ; 5,66)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4,33 \cdot 5,66 + 2,50 \cdot 5,66 = 38,66 \text{ u}$$

El producto escalar se puede calcular usando la definición, dado que conocemos sus módulos y el ángulo que forman entre los dos vectores:

$$\hat{\phi} = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$$

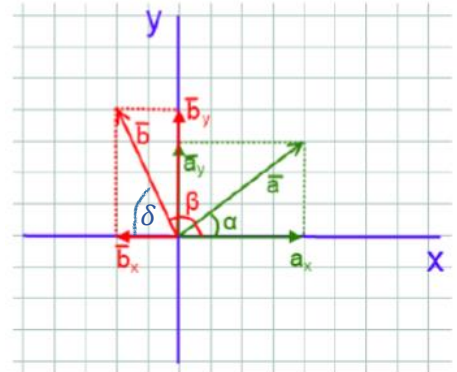
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \hat{\phi}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 8 \cdot \cos 15^\circ = 38,64 u$$

La diferencia de dos centésimas se debe a que los cálculos se han realizado con los números aproximados a dos decimales.

- Dados los vectores $\vec{a} = 4i + 3j$ y $\vec{b} = -2i + 4j$. calcula: a) El módulo de cada vector; b) El ángulo que forman con el semieje X positivo; c) Su suma; d) La diferencia $\vec{a} - \vec{b}$; e) El producto escalar de ambos vectores; f) Un vector unitario en la dirección de cada uno.

Primero empezaremos por representar gráficamente los vectores en un plano cartesiano.



- a) El módulo de cada vector:

$$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 u$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 4,47 u$$

- b) Para el ángulo α del vector $\vec{a}$, dado que tenemos sus componentes utilizamos la tangente:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \hat{\alpha} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{3}{4} = 36,87^\circ$$

Para el ángulo β del vector $\vec{b}$ vamos a usar un ángulo auxiliar δ dado que el triángulo rectángulo que forma el vector se encuentra en el 2º cuadrante. En este caso, (hay otros métodos de cálculo), usamos las componentes en positivo.

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{4}{2} \Rightarrow \hat{\delta} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{4}{2} = 63,43^\circ$$

$$\text{Entonces: } \hat{\beta} = 180^\circ - \hat{\delta}$$

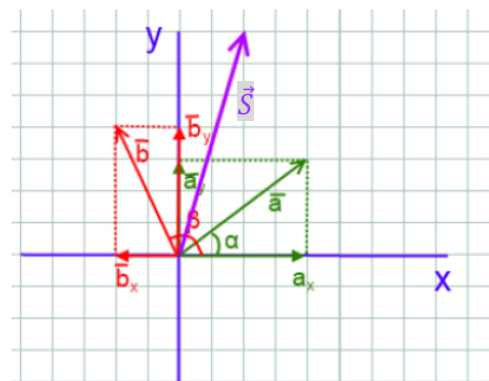
$$\hat{\beta} = 180^\circ - 63,43^\circ = 116,57^\circ$$

- c) Calculamos $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{S} = (4i + 3j) + (-2i + 4j)$$

$$\vec{S} = 4i - 2i + 3j + 4j$$

$$\vec{S} = 2i + 7j$$

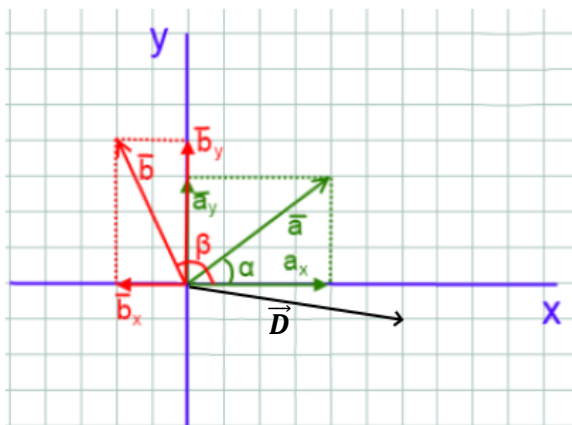


d) Calculamos $\vec{D} = \vec{a} - \vec{b}$

$$\vec{D} = (4i + 3j) - (-2i + 4j)$$

$$\vec{D} = 4i + 2i + 3j - 4j$$

$$\vec{D} = 6i - j$$



e) El producto escalar de ambos vectores se puede determinar de dos formas:

A partir de la definición de producto escalar de dos vectores. Debemos saber entonces que el ángulo que forman los dos vectores es:

$$\hat{\beta} - \hat{\alpha} = 116,57^\circ - 36,87^\circ = 79,70^\circ$$

Entonces, por definición:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 79,70^\circ$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 4,47 \cdot \cos 79,70^\circ = 4 u$$

Por componentes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 4 = 4 u$$

f) Un vector unitario en la dirección del vector $\vec{a}$ es un vector de módulo unidad con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{a}$.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|} ; \frac{a_y}{|\vec{a}|} \right)$$

$$\hat{a} = \left(\frac{4}{5} ; \frac{3}{5} \right) = (0,8 ; 0,6)$$

Un vector unitario en la dirección del vector $\vec{b}$ es un vector de módulo unidad con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{b}$.

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{b_x}{|\vec{b}|} ; \frac{b_y}{|\vec{b}|} \right)$$

$$\hat{b} = \left(\frac{-2}{4,47} ; \frac{4}{4,47} \right) = (-0,45 ; 0,89)$$



Bibliografía

- PATRICIA HELLER AND KENNETH HELLER, Cooperative Group Problem Solving in Physics University of Minnesota, <http://groups.physics.umn.edu/physed/Research/CGPS/GreenBook.html>
- Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología de la Nación. (2007). Nivel secundario para adultos: módulos de enseñanza semipresencial: Física - 1a ed. -Buenos Aires.
- ALONSO, M. y FINN, E. J., 1995. "Física" (Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington,). Cap. 2: Mediciones y unidades.
- BUECHE, F. J., 1995. Física General, 3ª Edición, Mc Graw Hill, México. Cap. 1: Sistemas de medida.
- CASTIGLIONE, PERAZZO, RELA, 1998. Física I. Troquel,
- HEWITT, P. 1999. Física conceptual. Pearson
- RUBINSTEIN, J., 2003. Aprender física: educación secundaria superior [nivel polimodal/medio] Buenos Aires: Lugar Editorial.
- SEARS, F.W.; ZEMANSKY, M.W. 1981. Física General. Aguilar. Madrid.

Enlaces relacionados:

Grupo de Educación en Física de la Universidad de Minnesota:

- <http://groups.physics.umn.edu/physed/>

Páginas web consultadas.

- http://www.iesdmjac.educa.aragon.es/departamentos/fq/temasweb/FQ1BAC/FQ1BAC%20Tema%205%20Dinamica/22_principio_de_accin_y_reaccin.html
- <http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esofisicaquimica/>
- <http://www.escritoscientificos.es/apunfisi/inicio.htm>

Página web sugerida para reforzar y ampliar el tema 2:

- <https://www.fisicapractica.com/vectores.php>
- <https://www.fisicapractica.com/>