



**INSTITUTO
BARRANQUERAS**
U.E.G.P N° 161

**Carrera: Tecnicatura Superior en Desarrollo en
Software**

Espacio Curricular: Análisis Matemático

Profesora: Melgarejo Gabriela

Curso: Segundo año

Tema: LIMITE DE UNA FUNCION

Empezamos a transitar el tercer eje temático de la Unidad Curricular.
Les dejo unos consejitos para poder optimizar el tiempo en este proceso de Aprendizaje:

- ▲ Realizar una primera lectura general.
- ▲ Volver a releer y anotar las dudas y luego enfocarme en esas dudas.
- ▲ Mirar los videos sugeridos

LÍMITE

2

LÍMITE EN UN PUNTO

El Cálculo, básicamente está fundamentado en los límites, por tanto este tema es trascendental para nuestro estudio. De hecho, la derivada y la integral definida son conceptos basados en límites. Conceptualizar límite determinando el comportamiento de una función e interpretarlo en su gráfica, ayudará bastante en el inicio del análisis de los límites.

DEFINICIÓN INTUITIVA

Ciertas funciones de variable real presentan un comportamiento un tanto singular en la cercanía de un punto, precisar sus características es nuestra intención y el estudio de los límites va a permitir esto.

Empecemos analizando ejemplos sencillos; en los que podamos por simple inspección concluir y tener una idea del concepto de límite.

Ejemplo 1

Veamos como se comporta la función f con regla de correspondencia $f(x) = 2x + 1$ en la cercanía de $x = 2$.

Evaluando la función para algunos valores de x , próximos (acercándose) a 2 :

x	$y = 2x + 1$
1.90	4.80
1.95	4.90
▼ 1.99	4.98 ▼
...	...
▲ 2.01	5.02 ▲
2.05	5.10
2.10	5.20

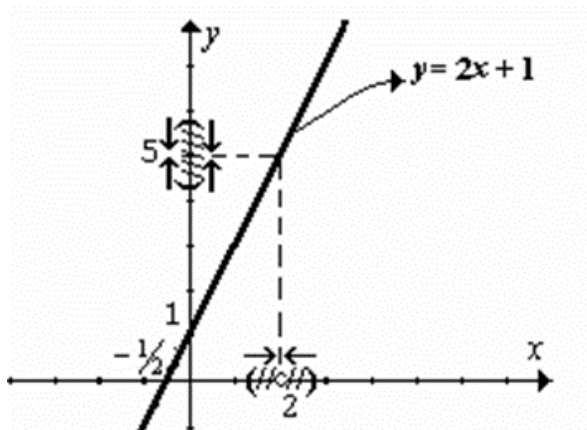
En la tabla de valores se han ubicado unas flechas para dar a entender que tomamos a la x

aproximándose a 2 en ambas direcciones y se observa que los valores de y se van acercando a 5.

Aunque son sólo seis valores, por ahora sin ponernos exigentes vamos a concluir diciendo que la función se aproxima a 5 cada vez que su variable independiente x se aproxima a 2. Este comportamiento lo escribiremos de la siguiente forma

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 5$$

Lo anterior se puede ilustrar desde la gráfica:



Ejemplo 2

Ahora veamos el comportamiento de esta otra función f con regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}, \text{ en la cercanía de } x = 1.$$

Evaluando la función para ciertos valores de x , cada vez más próximos a 1, tenemos:

x	$y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$
0.90	6.90
0.95	6.95
0.99	6.99
...	...
1.01	7.01
1.05	7.05
1.10	7.10

Parece ser que esta función se aproxima a tomar el valor de 7 cada vez que la variable independiente x se aproxima a tomar el valor de 1, es decir:

Activa

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$$

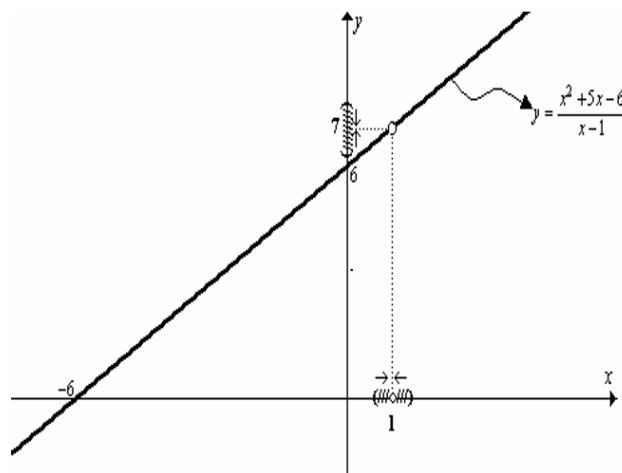
No es necesario que la función esté definida en el punto de aproximación. Por otro lado, la regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1}$$

4

es equivalente a $f(x) = x + 6$; $x \neq 1$

Este comportamiento se lo puede visualizar desde su gráfica:



De los ejemplos anteriores, sin ser tan riguroso todavía, podemos emitir la siguiente definición:

Una función f tiene límite L en un punto x_0 , si f se aproxima a tomar el valor L cada vez que su variable independiente x se aproxima a tomar el valor x_0 . Lo que se denota como: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Para los dos ejemplos anteriores el comportamiento de las funciones se puede determinar analizando sus gráficas; pero esto podría ser no tan sencillo; es más, suponga que se necesite bosquejar la gráfica teniendo características de su comportamiento. De ahí la necesidad del estudio de límite de funciones.

DEFINICIÓN FORMAL

Suponga que se plantea el problema de demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 1 = 5 \text{ o } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$$

Para esto, debemos garantizar formalmente el acercamiento que tiene la función a su correspondiente valor cada vez que su variable independiente se aproxime al valor especificado. Ya la tabla de valores no nos sirve, el hecho que se cumpla para algunos valores no indica que se cumpla para todos los valores próximos al punto. La demostración consistirá en escribir matemáticamente, lenguaje formal, la metodología del proceso, lo cual nos lleva a la necesidad de tener una definición formal de límite y no sólo para estos dos ejemplos, sino para cualquier función.

Antes, de llegar a la definición requerida, precisemos lo siguiente:

PRIMERO, para un lenguaje formal, decir que x toma valores próximos a un punto x_0 (que x está en torno a x_0), bastará con considerarla perteneciente a un intervalo o vecindad, centrado en x_0 , de semiapertura muy pequeña, la cual denotaremos con la letra griega δ (delta). Es decir:

$$|x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

Transformando la expresión anterior tenemos:

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ $x_0 - \delta - x_0 < x - x_0 < x_0 + \delta - x_0$ $-\delta < x - x_0 < \delta$ $ x - x_0 < \delta$	Restando "x_0" Empleando la definición de valor absoluto
---	---

Y, para que x no sea x_0 , bastará con proponer que $0 < |x - x_0| < \delta$

SEGUNDO, para decir que f está próxima a L (en torno a L), podemos expresar que pertenece a un intervalo o vecindad, centrado en L de semiamplitud muy pequeña, la cual denotaremos con la letra griega ε (épsilon). Es decir:

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Transformando la expresión anterior tenemos:

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ $- \varepsilon < f(x) - L < +\varepsilon$ $ f(x) - L < \varepsilon$	$\longleftarrow$ Restando " L "
	$\longleftarrow$ Aplicando la definición de valor absoluto

6

Con todo lo anterior, definimos formalmente límite de una función en un punto, de la siguiente manera:

Sea f una función de variable real y sean ε y δ cantidades positivas muy pequeñas.

Suponga que f se aproxima a L cuando x se aproxima a x_0 , denotado por $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

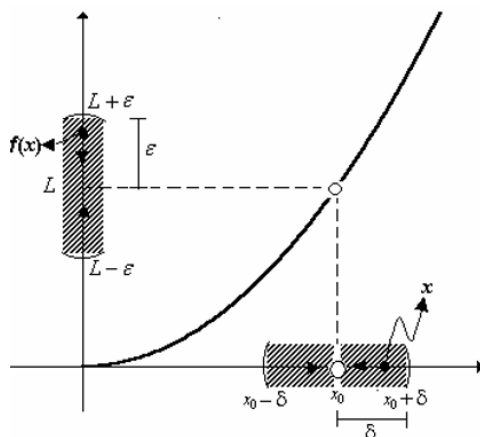
significa que para toda proximidad ε que se desee estar con f en torno a L , deberá poderse definir un intervalo en torno a x_0 en el cual tomar x , sin que necesariamente $x = x_0$, que nos garantice el acercamiento.

Es decir:

$$\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \right) \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

La definición indica que para asegurar que una función tiene límite deberíamos establecer una relación entre δ y ε .

Una manera de interpretar gráficamente lo mencionado es:



7

En la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ($x \neq 1$), se calculan los valores de $f(x)$ próximos a $x = 1$.

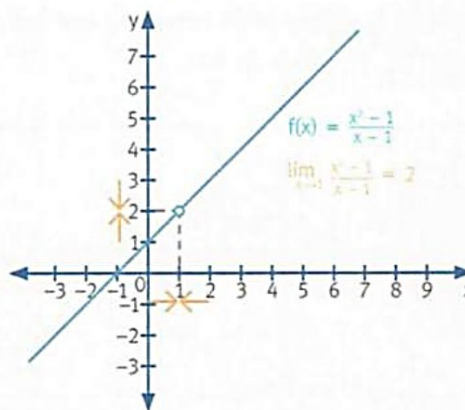
x se aproxima a 1 por izquierda					x se aproxima a 1 por derecha				
x	0,9	0,99	0,999	0,9999	...	1,0001	1,001	1,01	1,1
f(x)	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2,0001	2,001	2,01	2,1
f(x) se aproxima a 2					f(x) se aproxima a 2				

Para graficar $f(x)$ se factoriza y simplifica su expresión: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$

Como se observa en el gráfico, el punto de abscisa 1 no pertenece al gráfico de la función, pero a medida que x se aproxima a 1, los valores de $f(x)$ de la función se aproximan a 2.

Se determina así que "el límite de la función $f(x)$ a medida que x se aproxima a 1 es 2".

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$



VIDEOS PARA REFORZAR LA TEORIA

Límites Introducción y conceptos básicos

<https://www.youtube.com/watch?v=o2UTk8bsLS0>

Límite en un punto Ejemplo 1

<https://www.youtube.com/watch?v=nTaiyaoyJhw&list=PLeySRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=2>

Límite de una función en un punto Ejemplo 2

https://www.youtube.com/watch?v=RdLtaXRO_Ik&list=PLeySRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=3

Limite en un punto Ejemplo 3

<https://www.youtube.com/watch?v=LyLYoQKkOOc&list=PLeySRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=4>

Limite de una función en un punto Ejemplo 4

<https://www.youtube.com/watch?v=jz3WrcPJWps&list=PLeySRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=5>



TRABAJO PRACTICO CLASE N° 4

LEER Y RECORDAR LOS CASOS DE FACTOREO, PARA PODER CONTINUAR CON LIMITES

Qué es factorizar

<https://www.youtube.com/watch?v=sSfO1CsKJ4g&list=RDCMUCanMxWvOoiwtjLYm08Bo8QQ&index=2>

9

Los 6 casos de factorio. (resumen)

<https://www.youtube.com/watch?v=co5rR8QNa7s>

Factorización: Qué método usar para factorizar un polinomio?

<https://www.youtube.com/watch?v=-tS50MayXiE>

Factorización los 6 métodos más usados Explicación completa

<https://www.youtube.com/watch?v=a8CUEopWCN0>