

Barranqueras, miércoles 06 de octubre de 2021

Establecimiento:

E.E.T N° 2 “Gral. San Martín”

Espacio curricular:

MATEMÁTICA

Profesor: ROJAS, César Ariel

Cursos:

1^{ro} 1^{ra} Electrónica

1^{ro} 2^{da} Electromecánica

1^{ro} 3^{ra} Construcciones

Trabajo práctico N° 8: Factorización de polinomios I

Fecha de presentación: 20 de octubre

TRABAJO PRÁCTICO N° 8: FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS I

Factorizar un polinomio, de n cantidad de términos, implica expresarlo como un producto de polinomios primos.

Para realizar esta tarea existen varios casos de factoreo, nosotros desarrollaremos seis casos:

- Factor común.
- Factor común por grupos.
- Suma y resta de potencias de igual exponente.
- Diferencia de cuadrados
- Trinomio cuadrado perfecto.
- Cuadrinomio cubo perfecto.
- Teorema de Gauss.

FACTOR COMÚN

Para factorizar un polinomio a través del factor común, se debe recordar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o resta.

$$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c \text{ (el factor } a \text{ se repite en ambos términos)}$$

Para extraer el factor común, se debe proceder de manera inversa:

$$a \cdot b \pm a \cdot c = a \cdot (b \pm c)$$

Primero se debe reconocer cuál es el factor que se encuentra repetido en cada término y luego, para encontrar el factor que va entre paréntesis, se divide cada término por el factor común.

El factor común puede ser la variable del polinomio, elevada a la menor potencia, y/o el Divisor Común Mayor (D.C.M) de todos los coeficientes del mismo.

Ejemplos

$$a) P(x) = 2 \cdot x^2 - 4x = 2 \cdot x^2 - 2^2 \cdot x =$$

CÁLCULOS AUXILIARES

$$= 2 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot x = 2 \cdot x \cdot x - 2 \cdot x \cdot 2 =$$

$$2x \cdot (x - 2)$$

2	2	4	2
1		2	2
		1	

$$2 = 2 \cdot 1; 6 = 2 \cdot 3$$

$$MCD(2; 6) = 2$$

Variable (o letra) que se repite en todos los términos es x, y su menor potencia es 1.

Por lo tanto, el factor común es: $2x$

$$\frac{2 \cdot x \cdot x}{2 \cdot x} = x; \frac{-2 \cdot x \cdot 2}{2 \cdot x} = -2$$

$$b) P(x) = -12.x^6 + 6.x^5 - 15.x^3 \\ = 3.x^3.(-4.x^3 + 2.x^2 - 5)$$

C.A

12	2	6	2	15	5
6	2	3	3	3	3
3	3	1		1	
1					

$$12 = 2^2.3; 6 = 2.3; 15 = 5.3$$

$$MCD(15; 12; 6) = 3$$

Variable (o letra) que se repite en todos los términos es x, y su menor potencia es 3.

Por lo tanto, el factor común es: $3.x^3$

$$\frac{-12.x^6}{3.x^3} = -4.x^3; \frac{6.x^5}{3.x^3} = 2.x^2;$$

$$\frac{-15.x^3}{3.x^3} = -5$$

$$c) \frac{15}{16}x^4 - \frac{21}{40}x^3 - \frac{9}{28}x$$

$$= \frac{3}{4}x \cdot \left(\frac{5}{4}x^3 - \frac{7}{10}x^2 - \frac{3}{7} \right)$$

C.A

La letra que se repite en todos los términos es x , y su menor potencia es 1. Por lo tanto, la parte algebraica del factor común es:

$$x^1 = x.$$

Para obtener la parte numérica se obtiene el MCD, entre los numeradores y los denominadores.

15	21	9	3
5	7	3	

M.C.D (15,21,9) = 3

16	40	28	2
8	20	14	
4	10	7	

M.C.D (16,40,28) = $2^2 = 4$

Luego, el $M.C.D \left(\frac{15}{16}; \frac{21}{40}; \frac{9}{28} \right) = \frac{3}{4}$

Por lo tanto, el factor común es: $\frac{3}{4}x$

$$\frac{\frac{15}{16}x^4}{\frac{3}{4}x} = \frac{15}{16}x^4 : \frac{3}{4}x = \frac{15}{16}x^4 \cdot \frac{4}{3x} = \frac{5}{4}x^3$$

$$\begin{aligned}\frac{-\frac{21}{40}x^3}{\frac{3}{4}x} &= \frac{-21}{40}x^3 : \frac{3}{4}x = \frac{-21}{40}x^3 \cdot \frac{4}{3x} \\ &= -\frac{7}{10}x^2 \\ \frac{-\frac{9}{28}x}{\frac{3}{4}x} &= -\frac{9}{28}x : \frac{3}{4}x = -\frac{9}{28}x \cdot \frac{4}{3x} \\ &= -\frac{3}{7}\end{aligned}$$

Más ejemplos → Ver el video

https://www.youtube.com/watch?v=4CsbqV3Y4pg&list=PLeYSRPnY35dGY6GX7xO_lruvCIS6NkfR-&index=5

a) $x^5 \cdot y^2 - x^2 = x^2 \cdot (x^3 \cdot y^2 - 1)$

C.A

La letra que se repite en ambos términos es **x**, y su menor potencia es 2, por lo tanto, el factor común es: x^2

$$\frac{x^5 \cdot y^2}{x^2} = x^{5-2} \cdot y^2 = x^3 \cdot y^2$$

$$\frac{-x^2}{x^2} = -1$$

$$b) 10m^5n^2 + 15m^3n^5 =$$

$$5 \cdot m^3 \cdot n^2 \cdot (2 \cdot m^2 + 3 \cdot n^3)$$

C.A

La letra que se repite en ambos términos es **n**, y su menor potencia es 2, la otra letra que se repite es **m** y su menor potencia es 3. Por lo tanto, la parte algebraica del factor común es:
 $m^3 \cdot n^2$

10	15	5
2	3	

$$M.C.D (10; 15) = 5$$

Por lo tanto, el factor común es:

$$5 \cdot m^3 \cdot n^2$$

$$\frac{10m^5n^2}{5 \cdot m^3 \cdot n^2} = 2 \cdot m^2;$$

$$\frac{15m^3n^5}{5 \cdot m^3 \cdot n^2} = 3 \cdot n^3$$

$$c) 4a^2b + 6a^2b^4 - 2a^2 =$$

$$2 \cdot a^2 \cdot (2b + 3 \cdot b^4 - 1)$$

C.A

La letra que se repite en ambos términos es **a**, y su menor potencia es 2. Por lo tanto, la parte algebraica del factor común es: a^2

4	6	2	2
2	3	1	

$$M.C.D (4,6,2) = 2$$

Por lo tanto, el factor común es: $2 \cdot a^2$

$$\frac{4a^2b}{2 \cdot a^2} = 2b$$

$$\frac{6a^2b^4}{2 \cdot a^2} = 3 \cdot b^4; \quad \frac{-2a^2}{2a^2} = -1$$

Otros ejemplos → Ver video

https://www.youtube.com/watch?v=_MmNx9X9dz0&list=PLeySRPnY35dGY6GX7xO_lruvCIS6NkfR-&index=6

$$a) 16 \cdot x^3 \cdot y^2 - 8 \cdot x^2 \cdot y - 24 \cdot x^4 \cdot y^2 - 40 \cdot x^2 \cdot y^3 =$$

$$8x^2 \cdot y \cdot (2xy - 1 - 3x^2y - 5y^2)$$

C.A

La letra que se repite en todos los términos es **x**, y su menor potencia es 2, la otra letra que se repite es **y** su menor potencia es 1. Por lo tanto, la parte algebraica del factor común es: $x^2 \cdot y$

16	8	24	40	2
----	---	----	----	---

8	4	12	20	2
4	2	6	10	2
2	1	3	5	

$$\text{M.C.D (16,8,24,40)} = 2^3 = 8$$

Por lo tanto, el factor común es:

$$8x^2 \cdot y$$

$$\frac{16 \cdot x^3 \cdot y^2}{8 \cdot x^2 \cdot y} = 2xy ;$$

$$\frac{-8 \cdot x^2 \cdot y}{8 \cdot x^2 \cdot y} = -1 ;$$

$$\frac{-24 \cdot x^4 \cdot y^2}{8 \cdot x^2 \cdot y} = -3x^2y ;$$

$$\frac{-40 \cdot x^2 \cdot y^3}{8 \cdot x^2 \cdot y} = -5y^2$$

$$\begin{aligned} b) \quad & 6a^2b^3c + 4ab^2c^3 - 2a^2c^2 + a^2b^2c^2 \\ &= ac \cdot (6ab^3 + 4b^2c^2 - 2ac + ab^2c) \end{aligned}$$

C.A

Las letras que se repiten son **a** y **c**, la menor potencia de ambas es uno.

Por lo tanto, el factor común es:

$$ac$$

$$\frac{6a^2b^3c}{ac} = 6ab^3$$

$$\frac{4ab^2c^3}{ac} = 4b^2c^2$$

$$\frac{-2a^2c^2}{ac} = -2ac$$

$$\frac{a^2b^2c^2}{ac} = ab^2c$$

$$c) x^5 - x^4 + x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x^3 - x^2 + x - 1)$$

$$d) 12m^2n + 24m^3n^2 - 36m^4n^3 + 48m^5n^4$$

$$= 12m^2n(1 + 2mn - 3m^2n^2 + 4m^3n^3)$$

C.A

El factor común es: x^2

$$\frac{x^5}{x^2} = x^3; \frac{-x^4}{x^2} = -x^2;$$

$$\frac{x^3}{x^2} = x; \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

C.A

La parte algebraica del factor común es: m^2n

12	24	36	48	2
6	12	18	24	2
3	6	9	12	3
1	2	3	4	

$$M.C.D(12, 24, 36; 48)$$

$$= 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

Por lo tanto, el factor común es:
 $12m^2n$

$$\frac{12m^2n}{12m^2n} = 1$$

$$\frac{24m^3n^2}{12m^2n} = 2mn$$

$$\frac{-36m^4n^3}{12m^2n} = -3m^2n^2$$

$$\frac{48m^5n^4}{12m^2n} = 4m^3n^3$$

FACTOR COMÚN POR GRUPOS

Se aplica el *factor común por grupos* a polinomios que no tienen un factor común en todos los términos.

Vamos a explicar cómo aplicar este caso de factorización, utilizando ejemplos.

a) $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x + 6$

$$P(x) = (x^5 - 2x^4) + (-3x + 6)$$

→

Cálculos Auxiliares

Se arman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que en cada uno de ellos haya un factor común

$$P(x) = x^4 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (-x + 2)$$

→

En cada paréntesis se saca el factor común correspondiente.

En el primero es: x^4

$$\frac{x^5}{x^4} = x;$$

$$\frac{-2x^4}{x^4} = -2$$

En el segundo es: 3

$$\frac{-3x}{3} = -x; \quad \frac{6}{3} = 2$$

$$P(x) = x^4 \cdot (x - 2) - 3 \cdot (x - 2)$$

→

En el *factor común por grupos* es necesario que el contenido de los paréntesis sea igual, porque serán el nuevo factor común.

Si observamos ambos paréntesis vemos que los términos son iguales, pero con distinto signo, luego para lograr la igualdad necesitamos cambiar el signo de uno de los factores comunes: x^4 o 3, elijo arbitrariamente cambiar el signo al 3.

$$P(x) = (x - 2) \cdot (x^4 - 3)$$

→ Ahora sí, en cada término aparece la misma expresión que es el nuevo factor común.

El nuevo factor común es: $(x - 2)$

$$\frac{x^4 \cdot (x-2)}{(x-2)} = x^4; \quad \frac{-3 \cdot (x-2)}{(x-2)} = -3$$

Al sacar el nuevo factor común, la expresión queda factorizada a través del *factor común por grupos*.

$$b) Q(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

Cálculos Auxiliares

$$Q(x) = (3x^3 + 3x^2) + (2x + 2)$$

→ Se asocian los términos de manera que en cada grupo haya un factor común.

$$Q(x) = 3x^2(x + 1) + 2(x + 1)$$

→ En cada paréntesis se saca el factor común correspondiente.

En el primero es: $3x^2$

$$\frac{3x^3}{3x^2} = x$$

$$\frac{3x^2}{3x^2} = 1$$

En el segundo es: 2

$$\frac{2x}{2} = x$$

$$\frac{2}{2} = 1$$

$$Q(x) = (x + 1) \cdot (3x^2 + 2)$$

→ En cada término aparece la misma expresión que es el nuevo factor común: $(x+1)$

$$\frac{3x^2(x + 1)}{(x + 1)} = 3x^2$$

$$\frac{2(x+1)}{(x+1)} = 2$$

Analizamos más ejemplos→

https://www.youtube.com/watch?v=y_mkvBoYz-Y

$$\begin{aligned}
 a) \quad & a^2 + ab + ax + bx = \\
 & (a^2 + ab) + (ax + bx) = \\
 & a \cdot (a + b) + x \cdot (a + b) = \\
 & (a + b) \cdot (a + x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & 4a^3 - 1 - a^2 + 4a = \\
 & (4a^3 + 4a) + (-1 - a^2) = \\
 & 4a \cdot (a^2 + 1) - 1 \cdot (a^2 + 1) = \\
 & (a^2 + 1) \cdot (4a - 1)
 \end{aligned}$$

C.A

En el primer paréntesis el factor común es: **a**

$$\frac{a^2}{a} = a ; \frac{ab}{a} = b$$

En el segundo paréntesis el factor común es: **x**

$$\frac{ax}{x} = a ; \frac{bx}{x} = b$$

El nuevo factor común es el que se encuentra dentro del paréntesis:

$$(a + b)$$

$$\frac{a \cdot (a + b)}{(a + b)} = a ; \frac{x \cdot (a + b)}{(a + b)} = x$$

Cálculos Auxiliares

Asociamos el primer término con el cuarto y el segundo con el tercero.

En el primer paréntesis el factor común es: **4a**

$$\frac{4a^3}{4a} = a^2$$

$$\frac{4a}{4a} = 1$$

En el segundo paréntesis el factor común es: **-1**

$$\frac{-1}{-1} = 1$$

$$\frac{-a^2}{-1} = a^2$$

El nuevo factor común es: **(a² + 1)**

$$\begin{aligned}
 c) \quad & ax - 2bx - 2ay + 4by = \\
 & (ax - 2bx) + (-2ay + 4by) = \\
 & x \cdot (a - 2b) + 2y \cdot (-a + 2b) = \\
 & x \cdot (a - 2b) - 2y \cdot (a - 2b) = \\
 & (a - 2b) \cdot (x - 2y)
 \end{aligned}$$

$$\frac{4a \cdot (a^2 + 1)}{(a^2 + 1)} = 4a$$

$$\frac{-1 \cdot (a^2 + 1)}{(a^2 + 1)} = -1$$

Cálculos Auxiliares

Asociamos el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto.

En el primer paréntesis el factor común es: x

$$\frac{ax}{x} = a$$

$$\frac{-2bx}{x} = -2b$$

En el segundo paréntesis el factor común es: 2y

$$\frac{-2ay}{2y} = -a$$

$$\frac{4by}{2y} = 2b$$

Como los contenidos de los paréntesis son de distinto signo tengo que cambiar el signo de uno de los factores comunes, elijo el segundo: 2y

Más ejemplos → <https://www.youtube.com/watch?v=Jlxtaa-L3f0>

$$\begin{aligned}
 a) \quad & 2am - 2an + 2a - m + n - 1 = \\
 & (2am - 2an + 2a) + (-m + n - 1) = \\
 & 2a \cdot (m - n + 1) - 1 \cdot (-m + n - 1) = \\
 & (m - n + 1) \cdot (2a - 1)
 \end{aligned}$$

Cálculos Auxiliares

Asocio en orden, de a tres.

En el primer paréntesis el factor común es: 2a

$$\frac{2am}{2a} = m$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad & 3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b = \\
 & (3ax - 6a + 3ay) + (-2by - 2bx + 4b) = \\
 & 3a \cdot (x - 2 + y) + 2b \cdot (-y - x + 2) = \\
 & 3a \cdot (x - 2 + y) - 2b \cdot (y + x - 2) = \\
 & (x - 2 + y) \cdot (3a - 2b)
 \end{aligned}$$

$$\frac{-2an}{2a} = -n$$

$$\frac{2a}{2a} = 1$$

En el segundo paréntesis el factor común es: -1

$$\frac{-m}{-1} = m$$

$$\frac{n}{-1} = -n$$

$$\frac{-1}{-1} = 1$$

El nuevo factor común es: $(m - n + 1)$

$$\frac{2a \cdot (m - n + 1)}{(m - n + 1)} = 2a$$

$$\frac{-1 \cdot (-m + n - 1)}{(m - n + 1)} = -1$$

Cálculos Auxiliares

En el primer paréntesis asocio el primero, con el cuarto y el quinto, y en el otro el segundo con el tercero con el sexto.

En el primer paréntesis el factor común es: 3a

$$\frac{3ax}{3a} = x$$

$$\frac{-6a}{3a} = -2$$

$$\frac{3ay}{3a} = y$$

En el segundo paréntesis el factor común es: 2b

Otra forma de resolver el mismo ejercicio asociando, de otra forma, en este caso de a dos términos.

$$\begin{aligned}
 b') \quad & 3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b = \\
 & (3ax - 2bx) + (3ay - 2by) + (-6a + 4b) = \\
 & x.(3a - 2b) + y.(3a - 2b) + 2.(-3a + 2b) = \\
 & x.(3a - 2b) + y.(3a - 2b) - 2.(3a - 2b) = \\
 & (3a - 2b).(x + y - 2)
 \end{aligned}$$

$$\frac{-2by}{2b} = -y$$

$$\frac{-2bx}{2b} = -x$$

$$\frac{4b}{2b} = 2$$

Cambio el signo del segundo factor común.

El nuevo factor común es: $(x - 2 + y)$

$$\frac{3a.(x - 2 + y)}{(x - 2 + y)} = 3a$$

$$\frac{-2b.(y + x - 2)}{(x - 2 + y)} = -2b$$

Cálculos Auxiliares

Asocio en orden de a dos.

En el primer paréntesis el factor común es: x

$$\frac{3ax}{x} = 3a$$

$$\frac{-2bx}{x} = -2b$$

En el segundo paréntesis el factor común es: y

$$\frac{3ay}{y} = 3a$$

$$\frac{-2by}{y} = -2b$$

En el tercer paréntesis el factor común es: 2

$$\frac{-6a}{2} = -3a$$

$$\begin{aligned}
 C) 3x^3 + 2axy + 2ay^2 - 3xy^2 - 2ax^2 - 3x^2 &= \\
 (3x^3 - 3xy^2 - 3x^2y) + (2axy + 2ay^2 - 2ax^2) &= \\
 3x \cdot (x^2 - y^2 - xy) + 2a \cdot (xy + y^2 - x^2) &= \\
 3x \cdot (x^2 - y^2 - xy) - 2a \cdot (-xy - y^2 + x^2) &= \\
 (x^2 - y^2 - xy) \cdot (3x - 2a)
 \end{aligned}$$

$$\frac{4b}{2} = 2b$$

Cambio el signo del factor común del tercer paréntesis.

El nuevo factor común es: (3a-2b)

$$\frac{x \cdot (3a - 2b)}{(3a - 2b)} = x$$

$$\frac{y \cdot (3a - 2b)}{(3a - 2b)} = y$$

$$\frac{-2 \cdot (3a - 2b)}{(3a - 2b)} = -2$$

Cálculos Auxiliares

Asocio por un lado los términos que tienen coeficiente 3 y por otro los de coeficiente 2.

En el primer paréntesis el factor común es: 3x

$$\frac{3x^3}{3x} = x^2$$

$$\frac{-3xy^2}{3x} = -y^2$$

$$\frac{-3x^2y}{3x} = -xy$$

En el segundo paréntesis el factor común es: 2a

$$\frac{2axy}{2a} = xy$$

$$\frac{2ay^2}{2a} = y^2$$

$$\frac{-2ax^2}{2a} = -x^2$$

Cambio el signo del factor común del segundo paréntesis.

El nuevo factor común es:

$$(x^2 - y^2 - xy)$$

$$\frac{3x \cdot (x^2 - y^2 - xy)}{(x^2 - y^2 - xy)} = 3x$$

$$\frac{-2a \cdot (-xy - y^2 + x^2)}{(x^2 - y^2 - xy)} = -2a$$

SUMA Y RESTA DE POTENCIAS DE IGUAL EXPONENTE

Para un polinomio de la forma $P(x) = x^n \pm a^n$ existen cuatro posibilidades.

$$P(x) = x^n \pm a^n \text{ y } n \text{ par}$$

$$P(x) = x^n \pm a^n \text{ y } n \text{ impar}$$

Para aplicar este caso de factorización se necesita encontrar los divisores¹ de $P(x) = x^n \pm a^n$, aplicando el *Teorema del resto* y luego realizar la división usando la *Regla de Ruffini*.

Los posibles divisores tienen la forma $(x \pm a)$. El polinomio

$P(x) = x^n \pm a^n$, puede tener dos, uno, o ningún divisor.

Vamos a analizar las cuatro posibilidades a través de ejemplos.

PRIMER CASO: Resta de potencias de igual exponente, con n par.

$$a) P(x) = x^4 - 81 = x^4 - 3^4 \begin{cases} (x+3) \\ (x-3) \end{cases}$$

$P(x)$ tiene dos divisores, por lo tanto, lo vamos a dividir por $(x+3)$ y luego por $(x-3)$. Aplicando la Regla de Ruffini.

$$x^4 - 81 \quad x+3$$

$$\begin{array}{r|l} 0/ & x^3 - 3x^2 + 9x - 27 \\ & \quad \quad \quad 0/ \quad \quad \quad x^2 + 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} x-3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & x^4 & 0 & 0 & 0 & -81 \end{array}$$

Cálculos Auxiliares

$$81 \mid 3$$

$$27 \mid 3$$

$$9 \mid 3$$

$$3 \mid 3$$

$$1$$

$$81 = 3^4$$

Los posibles divisores son $(x+3)$ o $(x-3)$, usamos el **Teorema del resto** para encontrar el divisor.

Para saber cuál es el divisor el **Resto tiene que ser cero**

$$x^4 - 81 \mid x+3$$

¹ Un polinomio es divisor de otro si el RESTO de la división es **CERO**

	1	0	0	0	-81
		-3	9	-27	81
-3	1	-3	9	-27	0 ← R
		3	0	27	
3	1	0	9	0 ← R	

0/

$$P(-3) = (-3)^4 - 81 = 81 - 81 = 0 < - - \text{Resto}$$

El resto de la división es cero, por lo tanto $(x+3)$ es divisor.

$x^4 - 81$	$x-3$
0/	

$$P(3) = (3)^4 - 81 = 81 - 81 = 0 < - - \text{Resto}$$

El resto de la división es cero, por lo tanto $(x-3)$ es divisor.

CONCLUSIÓN

$P(x) = x^4 - 81$, tiene dos divisores, $(x+3)$ y $(x-3)$ y queda factorizado así:

$$P(x) = x^4 - 81 = (x + 3) \cdot (x - 3) \cdot (x^2 + 9)$$

SEGUNDO CASO: Suma de potencias igual exponente, con n par.

$$P(x) = x^4 + 81 = x^4 + 3^4$$

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$$81 = 3^4$$

Los posibles divisores son $(x+3)$ o $(x-3)$, usamos el **Teorema del resto** para saber cuál es el divisor.

Para saber cuál es el divisor el **Resto tiene que ser cero**

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 81 & \mathbf{x+3} \\ \hline 162/ & \end{array}$$

Teorema del resto

$$P(-3) = (-3)^4 + 81 =$$

$$81 + 81 = 162 \neq 0$$

El resto es distinto de cero, por lo tanto, **$(x+3)$ no es divisor**

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 81 & \mathbf{x-3} \\ \hline 162/ & \end{array}$$

Teorema del resto

$$P(3) = (3)^4 + 81 =$$

$$81 + 81 = 162 \neq 0$$

El resto es distinto de cero, por lo tanto, **$(x-3)$ no es divisor.**

CONCLUSIÓN

Como observamos $P(x) = x^4 + 3^4$, no tiene divisores de la forma $(x+3)$ o $(x-3)$, por lo tanto, **no se puede aplicar este caso de factoro.**

TERCER CASO: Resta de potencias de igual exponente, con n impar.

$$P(x) = x^3 - 27 = x^3 - 3^3$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 27 \quad x-3 \\ 0/ \quad \hline x^2 + 3x + 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & x^3 & 0 & 0 & -27 \\ & 1 & 0 & 0 & -27 \\ & & & & \\ & & 3 & 9 & 27 \\ \hline 3 & 1 & 3 & 9 & 0 \leftarrow R \end{array}$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$27 = 3^3$$

Los posibles divisores son: $(x+3)$ o $(x-3)$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 27 & x+3 \\ -54/ & \end{array}$$

Teorema del resto

$$P(-3) = (-3)^3 - 27 =$$

$$-27 - 27 = -54 \neq 0$$

El resto es distinto de cero, por lo tanto, **$(x+3)$ no es divisor**

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 27 & x-3 \\ -54/ & \end{array}$$

Teorema del resto

$$P(3) = (3)^3 - 27 =$$

$$27 - 27 = 0$$

Por lo tanto, **(x-3) es divisor**

CONCLUSIÓN

$P(x) = x^3 - 3^3$, tiene un divisor: (x-3) y queda factorizado así:

$$\mathbf{P(x) = x^3 - 27 = (x - 3) \cdot (x^2 + 3x + 9)}$$

CUARTO CASO: Suma de potencias de igual exponente, con n impar.

a) $P(x) = x^5 + 32 = x^5 + 2^5$

$$\begin{array}{r} x^5 + 32 \quad x+2 \\ 0/ \quad \hline x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \end{array}$$

Hacemos la división entre: $x+2$

x^5	0	0	0	0	32
1	0	0	0	0	32
	-2	4	-8	16	-32
-2	1	-2	4	-8	16
	$0 \leftarrow R$				

Cálculos Auxiliares

$$\begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$32 = 2^5$$

Los posibles divisores son: $(x+2)$ o $(x-2)$.

$$\begin{array}{r} x^5 + 32 \quad x+2 \\ 64/ \end{array}$$

Teorema del resto

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^5 + 32 = \\ -32 + 32 &= 0 \end{aligned}$$

El resto es cero, por lo tanto, **$(x+2)$ es divisor**

$$\begin{array}{r} x^5 + 32 \quad x-2 \\ -54/ \end{array}$$

Teorema del resto

$$\begin{aligned} P(2) &= (2)^5 + 32 = \\ 32 + 32 &= 64 \neq 0 \end{aligned}$$

El resto es distinto de cero, por lo tanto, **$(x-2)$ no es divisor**

$P(x) = x^5 + 2^5$, Suma de potencia de igual exponente, por lo tanto, el polinomio tiene un divisor:

$$(x + 2)$$

A(x) es igual a la multiplicación del cociente por el divisor.

CONCLUSIÓN

$P(x) = x^5 + 2^5$, tiene un divisor: $(x+2)$ y queda factorizado así:

$$x^5 + 32 = (x + 2) \cdot (x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16)$$

Para resumir la información realizamos un cuadro, que nos permitirá evitar el *Teorema del Resto*, ya que nos va a indicar cuál es el divisor en cada caso.

	$P(x) = x^n \pm a^n$	Divisor/es
n impar	$x^n + a^n$	$(x + a)$
	$x^n - a^n$	$(x - a)$
n par	$x^n - a^n$	$(x + a)$ y $(x - a)$
	$x^n + a^n$	No tiene divisores de la forma $(x \pm a)$

Ahora vamos a realizar distintos ejercicios apoyándonos en distintos videos.

Primer video → <https://www.youtube.com/watch?v=HPaTVkOq0U8>

$$a) P(x) = x^4 - 16 = x^4 - 2^4 \begin{cases} (x+2) \\ (x-2) \end{cases}$$

Hacemos la primera división por (x+2) y la segunda por (x-2), a través de la *Regla de Ruffini*

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 16 & x+2 \\ 0/ & \overline{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} \quad x-2 \\ & \quad \quad \quad 0/ \quad \quad \quad \overline{x^2 + 4} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & x^4 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ & & -2 & 4 & -8 & 16 \\ \hline -2 & 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \leftarrow R \\ & & 2 & 0 & 8 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \leftarrow R \end{array}$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$$16 = 2^4$$

$P(x) = x^4 - 2^4$, Resta de potencia de igual exponente, con n par (tercera fila de nuestra tabla) por lo tanto, el polinomio tiene dos divisores:

$$(x-2) \text{ o } (x+2)$$

Al resto lo representamos con la letra: R.

P(x) es igual a la multiplicación de los dos divisores, y el último cociente

CONCLUSIÓN

$$P(x) = x^4 - 16 = (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4)$$

Segundo video → <https://www.youtube.com/watch?v=J33L10nai24>

En este video el autor no factoriza el término independiente, sino que aplica raíz enésima, que también es un procedimiento válido.

a) $P(x) = 27 + y^3 = y^3 + 3^3$

$$\begin{array}{r|l} y^3 + 27 & y+3 \\ 0/ & \hline & y^2 - 3y + 9 \end{array}$$

Aplicamos la Regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} y^3 & 0 & 0 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 27 \\ & -3 & 9 & -27 \\ \hline -3 & 1 & -3 & 9 & 0 \leftarrow R \end{array}$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{aligned} 27 + y^3 = 0 &\rightarrow y^3 = -27 \rightarrow y \\ &= \sqrt[3]{-27} \rightarrow y_1 = -3 \end{aligned}$$

Luego la raíz de R(x) es $(y - y_1)$, o sea:

$(y - y_1) = (y - (-3)) = (y + 3)$. Por lo tanto, el divisor es: $(y + 3)$

CONCLUSIÓN

$$P(x) = 27 + y^3 = (y + 3) \cdot (y^2 - 3y + 9)$$

b) $Q(x) = x^5 + 32$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 32 & x+2 \\ 0/ & \hline & x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \end{array}$$

Cálculos Auxiliares

Este ejercicio ya fue resuelto, lo vamos a realizar nuevamente utilizando la metodología usada por el autor del video, o sea, no factorizando el término Independiente, sacando su raíz enésima.

$$x^5 + 32 = 0 \rightarrow x^5 = -32 \rightarrow$$

Aplicamos la *Regla de Ruffini*

x^5	0	0	0	0	32	
1	0	0	0	0	32	

$$c) R(x) = a^4 - b^4 c^4$$

$$\begin{array}{r} a^4 - b^4 c^4 \quad a - bc \\ 0/ \quad \hline a^3 + a^2 bc + ab^2 c^2 + b^3 c^3 \end{array}$$

Aplicamos la *Regla de Ruffini*

a^4	0	0	0	$-b^4 c^4$
1	0	0	0	$-b^4 c^4$
	bc	$b^2 c^2$	$b^3 c^3$	$b^4 c^4$
bc	1	bc	$b^2 c^2$	$b^3 c^3$
				$0 \leftarrow R$

Cálculos Auxiliares

$$a^4 - b^4 c^4 = 0 \rightarrow a^4 = b^4 c^4 \rightarrow$$

$$a = \sqrt[4]{b^4 c^4} \rightarrow a_1 = bc$$

Luego la raíz de R(x) es $(a - a_1)$, o sea:

$(a - a_1) = (a - bc)$. Por lo tanto, el divisor es: $a - bc$

CONCLUSIÓN

$$a^4 - b^4 c^4 = (a - bc) \cdot (a^3 + a^2 bc + ab^2 c^2 + b^3 c^3)$$

$$d) S(x) = x^6 - y^6$$

$$\begin{array}{r}
 x^6 - y^6 \quad | \quad \begin{array}{c} x + y \\ \hline x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + x^1y^4 - y^5 \\ \hline 0/ \end{array} \quad \begin{array}{c} x-y \\ \hline x^4 + x^2y^2 + y^4 \\ \hline 0/ \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c|ccccccc}
 x^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^6 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^6 \\
 \\
 & -y & y^2 & -y^3 & y^4 & -y^5 & y^6 \\
 \hline
 -y & 1 & -y & y^2 & -y^3 & y^4 & -y^5 & 0 < -R \\
 \\
 & y & 0 & y^3 & 0 & y^5 & \\
 \hline
 y & 1 & 0 & y^2 & 0 & y^4 & 0 < -R
 \end{array}
 \end{array}$$

CONCLUSIÓN

$$x^6 - y^6 = (x + y) \cdot (x - y) \cdot (x^4 + x^2y^2 + y^4)$$

Cálculos Auxiliares

$$x^6 - y^6 = 0 \rightarrow x^6 = y^6 \rightarrow$$

$$x = \pm \sqrt[6]{y^6} \rightarrow x = \pm y$$

Luego los divisores son:
 $(x + y)y(x - y)$.

OBSERVACIÓN:

El autor del video hace la división entre $(x + y)$, faltó la división entre $(x - y)$.

$$e) T(x) = a^7 - 128x^7$$

$$\begin{array}{r}
 a^7 - 128x^7 \quad | \quad \begin{array}{c} (a - 2x) \\ \hline a^6 + 2xa^5 + 4x^2a^4 + 8x^3a^3 + 16x^4a^2 + 32x^5a + 64x^6 \\ \hline 0/ \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c|ccccccc}
 a^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -128x^7 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -128x^7
 \end{array}
 \end{array}$$

Cálculos Auxiliares

$$a^7 - 128x^7 = 0$$

$$a^7 = 128x^7$$

$$a = \sqrt[7]{128x^7}$$

$$a = \sqrt[7]{2^7x^7}$$

$$a_1 = 2x$$

		$2x$	$4x^2$	$8x^3$	$16x^4$	$32x^5$	$64x^6$	$128x^7$
$2x$	1	$2x$	$4x^2$	$8x^3$	$16x^4$	$32x^5$	$64x^6$	0<-R

Luego el divisor de T(x) es:

$$(a - a_1) = (a - 2x)$$

CONCLUSIÓN

$$a^7 - 128x^7 = (a - 2x)(a^6 + 2xa^5 + 4x^2a^4 + 8x^3a^3 + 16x^4a^2 + 32x^5a + 64x^6)$$

En definitiva, analizamos dos formas de resolver, uno factorizando el termino independiente, y usando la tabla que indica el divisor del polinomio según el caso. El segundo hallando la raíz x_1 , igualando a cero el polinomio, y obteniendo el divisor según la fórmula:

$(x - x_1)$, donde x_1 es la raíz del polinomio.

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Este caso de factoro es un caso especial de *suma y resta de potencia de igual exponente*, o sea resta de potencias de igual exponente con n igual a dos, o sea par.

$$P(x) = x^2 - a^2$$

$$P(x) = x^2 - a^2$$

Cálculos Auxiliares

Resta de potencia de igual exponente, con n par, miramos la tabla, tercera fila, y observamos que tiene dos divisores. (x+a) y (x-a).

$$\begin{array}{r|l} x^2 - a^2 & x+a \\ 0/ & x-a \\ \hline & 0/ \quad 1 \end{array}$$

	x^2	0	$-a^2$
	1	0	$-a^2$
		-a	a^2
-a	1	-a	$0 < -R$
		a	
a	1	$0 < -R$	

CONCLUSIÓN

$$x^2 - a^2 = (x + a) \cdot (x - a)$$

En conclusión, para resolver la diferencia de cuadrados se utiliza la fórmula:

$$x^2 - a^2 = (x + a) \cdot (x - a)$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} a) P(x) &= x^2 - 9 = x^2 - 3^2 \\ &= (x + 3) \cdot (x - 3) \end{aligned}$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$9 = 3^2$$

CONCLUSIÓN

$$x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

$$b) Q(x) = x^4 - 25 = (x^2)^2 - 5^2 \\ = (x^2 + 5)(x^2 - 5)$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$25 = 5^2$$

$$x^4 = x^{2 \cdot 2} = (x^2)^2$$

CONCLUSIÓN

$$x^4 - 25 = (x^2 + 5)(x^2 - 5)$$

$$c) x^2 - 49 = x^2 - 7^2 \\ = (x + 7) \cdot (x - 7)$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{array}{r|l} 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$49 = 7^2$$

CONCLUSIÓN

$$x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$$

$$d) x^2 - \frac{49}{121} = x^2 - \left(\frac{7}{11}\right)^2$$

Cálculos Auxiliares

$$= \left(x + \frac{7}{11}\right) \cdot \left(x - \frac{7}{11}\right)$$

$$\begin{array}{r|l} 49 & 7 & 121 & 11 \\ 7 & 7 & 11 & 11 \\ 1 & & 1 & \end{array}$$

$$49 = 7^2, 121 = 11^2$$

CONCLUSIÓN

$$x^2 - \frac{49}{121} = \left(x + \frac{7}{11}\right) \left(x - \frac{7}{11}\right)$$

$$\begin{aligned} e) 25x^2 - 4 &= 5^2x^2 - 2^2 \\ &= (5x)^2 - 2^2 \\ &= (5x + 2) \cdot (5x - 2) \end{aligned}$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$25 = 5^2, 4 = 2^2$$

CONCLUSIÓN

$$25x^2 - 4 = (5x + 2) \cdot (5x - 2)$$

$$\begin{aligned} f) y^6 - 100 &= (y^3)^2 - 10^2 \\ &= (y^3 + 10)(y^3 - 10) \end{aligned}$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$100 = 5^2 2^2 = (5 \cdot 2)^2 = 10^2$$

$$y^6 = y^{3 \cdot 2} = (y^3)^2$$

CONCLUSIÓN

$$y^6 - 100 = (y^3 + 10)(y^3 - 10)$$

$$\begin{aligned} g) x^4 - 625 &= (x^2)^2 - (5^2)^2 \\ &= (x^2 + 5^2) \cdot (x^2 - 5^2) \end{aligned}$$

Cálculos Auxiliares

$$\begin{array}{r|l} 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 1 \mid \\
 625 = 5^4 \rightarrow 5^4 = 5^{2 \cdot 2} = (5^2)^2 \\
 \\
 x^4 = x^{2 \cdot 2} = (x^2)^2
 \end{array}$$

CONCLUSIÓN

$$x^4 - 625 = (x^2 + 5^2) \cdot (x^2 - 5^2)$$

Más ejemplo, ver video → https://www.youtube.com/watch?v=dmUjA2V_vOQ

a) $m^2 - 1 = m^2 - 1^2 = (m + 1) \cdot (m - 1)$

CONCLUSIÓN

$$m^2 - 1 = (m + 1) \cdot (m - 1)$$

b) $16x^2 - 25y^2 = 2^4x^2 - 5^2y^2 = 2^{2 \cdot 2}x^2 - 5^2y^2 = (2^2)^2x^2 - 5^2y^2$
 $= 4^2x^2 - 5^2y^2 = (4x)^2 - (5y)^2 = (4x + 5y)(4x - 5y)$

CONCLUSIÓN

$$16x^2 - 25y^2 = (4x + 5y)(4x - 5y)$$

c) $9m^6 - 36n^8 = 3^2m^{3 \cdot 2} - 3^22^2n^{4 \cdot 2} = 3^2(m^3)^2 - (3 \cdot 2)^2(n^4)^2$
 $= (3 \cdot m^3)^2 - (6 \cdot n^4)^2 = (3 \cdot m^3 + 6 \cdot n^4) \cdot (3 \cdot m^3 - 6 \cdot n^4)$

CONCLUSIÓN

$$9m^6 - 36n^8 = (3 \cdot m^3 + 6 \cdot n^4) \cdot (3 \cdot m^3 - 6 \cdot n^4)$$

d) $4x^2 - 9 = 2^2x^2 - 3^2 = (2x)^2 - 3^2 = (2x + 3) \cdot (2x - 3)$

CONCLUSIÓN

$$4x^2 - 9 = (2x + 3) \cdot (2x - 3)$$

$$e) m^4 - 36n^2 = m^{2 \cdot 2} - 6^2 n^2 = (m^2)^2 - (6n)^2 = (m^2 + 6n)(m^2 - 6n)$$

CONCLUSIÓN

$$m^4 - 36n^2 = (m^2 + 6n)(m^2 - 6n)$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 8: FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS I

1) Factorizar los siguientes polinomios usando factor común.

a) $16.x^3.y^2 - 8.x^2.y - 24.x^4.y^2 - 40.x^2.y^3 =$

b) $\frac{25.a.b^7}{6} + \frac{15.a^2.b^3}{8} + \frac{35.a^3.b^5}{12} + \frac{30.a^5.b^2}{28} =$

2) Factorizar los siguientes polinomios usando factor común por grupos.

a) $6x^3 - 9x^2 - 18x + 27 =$

b) $x^4 + 3.x - 2.x^3 - 6 =$

c) $6.a^2 + 15.a - 4.a - 10$

3) Factorizar usando suma o resta de potencias de igual exponente.

a) $x^6 - 1625 =$

b) $a^7 + b^7 =$

c) $x^3 - y^3 =$

4) Factorizar usando diferencia de cuadrados.

a) $9x^4 - 64y^6 =$

b) $49x^4y^2 - 64w^{10}z^{14} =$

