

Barranqueras, lunes 20 de septiembre de 2021

Establecimiento:

E.E.T N° 2 “Gral. San Martín”

Espacio curricular:

MATEMÁTICA

Profesor: ROJAS, César Ariel

Cursos:

1ro 1ra Electrónica

1ro 2da Electromecánica

1ro 3ra Construcciones

**TRABAJO PRÁCTICO N° 7: Operaciones
con números complejos III**

**-FECHA DE PRESENTACIÓN: lunes 4
de octubre**

Números Complejos en forma polar

Un número complejo escrito en la forma: $z = a + bi$, está expresada en forma binómica.

El número $z = a + bi$, queda perfectamente si indicamos su **su *modulo* ρ y su *agumento* α** . Lo escribimos de la forma ρ_α denominada **forma polar**

Fórmulas de ρ y α en función de a y b .

Módulo

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \begin{cases} \alpha \\ \alpha + 180^\circ \end{cases}$$

Ejercicios. Pasar de forma binómica a polar los siguientes números complejos:

$$a) z_1 = 2 + 3i$$

Datos:

$$a = 2$$

$$b = 3$$

$$a(+); b(+)\rightarrow z_1 \in I \text{ cuad.} \rightarrow 0 \leq \alpha < 90$$

Módulo

$$\rho = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Argumento

$$\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{cases} \alpha = 56^\circ 18' 35,76'' \\ \alpha + 180 = 236^\circ 18' 35,76'' \end{cases}$$

Conclusión

Forma binómica

$$z_1 = 2 + 3i$$

Forma polar

$$z_1 = \sqrt{13}_{56^{\circ}18'35,76''}$$

$$b) z_2 = -3 + i$$

Datos:

$$a = -3$$

$$b = 1$$

$$a(-); b(+)\rightarrow z_2 \in II \text{ cuad.} \rightarrow 90 \leq \alpha \leq 180$$

Módulo

$$\rho = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

Argumento

$$\tan^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right) = \begin{cases} \alpha = -18^{\circ}26'5,82'' \\ \alpha + 180 = 161^{\circ}33'54,1'' \end{cases}$$

Conclusión

Forma binómica

$$z_2 = -3 + i$$

Forma polar

$$z_2 = \sqrt{10}_{161^{\circ}33'54,1''}$$

$$c) z_3 = 5 - 12i$$

Datos:

$$a = 5$$

$$b = -12$$

$$a(+); b(-)\rightarrow z_3 \in IV \text{ cuad.} \rightarrow 270 \leq \alpha < 360$$

Módulo

$$\rho = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Argumento

$$\tan^{-1}\left(\frac{-12}{5}\right) = \begin{cases} \alpha = -67^\circ 22' 48,49'' \\ \alpha + 180 = 112^\circ 37' 11,5'' \\ \alpha + 2.180 = 292^\circ 37' 11,5'' \end{cases}$$

Conclusión

Forma binómica

$$z_3 = 5 - 12i$$

Forma polar

$$z_3 = 13_{292^\circ 37' 11,5''}$$

$$d) z_4 = -1 - 2i$$

Datos:

$$a = -1$$

$$b = -2$$

$$a(-); b(-) \rightarrow z_4 \in III \text{ cuad.} \rightarrow 180 \leq \alpha < 270$$

Módulo

$$\rho = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

Argumento

$$\tan^{-1}\left(\frac{-2}{-1}\right) = \begin{cases} \alpha = 63^\circ 26' 5,82'' \\ \alpha + 180 = 243^\circ 26' 5,82'' \end{cases}$$

	Conclusión
Forma binómica	Forma polar
$z_4 = -1 - 2i$	$z_4 = \sqrt{5}_{243^{\circ}26'5,82''}$

Pasaje de números complejos en forma polar a binómica

Podemos realizar el paso inverso a las operaciones antes desarrolladas, o sea: *conocidos el módulo ρ y el argumento α* hallar la *la parte real a y la parte imaginaria b*

Fórmulas

$$a = \rho \cdot \cos \alpha$$

$$b = \rho \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot i$$

Ejercicios. Pasar de forma polar a binómica los siguientes números complejos:

$$a) z_1 = 5 \frac{\pi}{6}$$

Datos

$$\rho = 5$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} = \frac{180}{6} = 30^{\circ}$$

$$0 \ll \alpha < 90 \rightarrow z_1 \in I \text{ cuad.} \rightarrow a(+); b(+)$$

$$a = 5 \cdot \cos 30 = 4,33$$

$$b = 5 \cdot \operatorname{sen} 30 = 2,5i$$

Conclusión

Forma polar

$$Z_1 = 5 \frac{\pi}{6}$$

Forma binómica

$$Z_1 = 4,33 + 2,5i$$

$$b) Z_2 = 2 \frac{3}{4} \pi$$

Datos

$$\rho = 2$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \pi = \frac{3}{4} \cdot 180 = 135^\circ$$

$$90 \ll \alpha < 180 \rightarrow z_1 \in II \text{ cuad.} \rightarrow a(-); b(+)$$

$$a = 2 \cdot \cos 135^\circ = -1,41$$

$$b = 2 \cdot \sen 135^\circ = 1,41i$$

Conclusión

Forma polar

$$Z_1 = 5 \frac{3}{4} \pi$$

Forma binómica

$$Z_1 = -1,41 + 1,41i$$

$$c) Z_3 = 3_{240}$$

Datos

$$\rho = 3$$

$$\alpha = 240^\circ$$

$$180 \ll \alpha < 270 \rightarrow z_1 \in III \text{ cuad.} \rightarrow a(-); b(-)$$

$$a = 3 \cdot \cos 240^\circ = -1,5$$

$$b = 3 \cdot \sen 240^\circ = -2,59i$$

Conclusión

Forma polar

$$Z_3 = 3_{240}$$

Forma binómica

$$Z_3 = -1,5 - 2,59i$$

Operaciones con números en forma polar

Multiplicación

Para realizar el producto entre dos números complejos, se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

Simbólicamente:

$$r_{\alpha} \cdot r'_{\beta} = (r \cdot r')_{\alpha + \beta}$$

Ejemplo

$$3_{45^{\circ}} \cdot 2_{30^{\circ}} = (3 \cdot 2)_{45^{\circ} + 30^{\circ}} = 6_{75}$$

División

Como consecuencia inmediata del producto, podemos decir que, para dividir dos números complejos, se dividen los módulos y se restan los argumentos.

Simbólicamente

$$r_{\alpha} : r'_{\beta} = (r : r')_{\alpha - \beta}$$

Ejemplo

$$\frac{14_{121^{\circ}}}{7_{48^{\circ}}} = (14 : 7)_{121^{\circ} - 48^{\circ}} = 2_{73^{\circ}}$$

Potencia

Para calcular $(r_\alpha)^n$, elevamos el módulo a la potencia n y multiplicamos por n al módulo.

Simbólicamente

$$(r_\alpha)^n = r_{n.\alpha}^n$$

Ejemplo

$$(2_{45^\circ})^3 = 2^3_{3.45^\circ} = 8_{135^\circ}$$

Radicación de números complejos

$$\sqrt[n]{R_\beta} = \rho_\alpha$$

$$R_\beta = (\rho_\alpha)^n = \rho_{n.\alpha}^n$$

$$R_\beta = \rho_{n.\alpha}^n$$

Módulo

$$R = \rho^n$$

$$\rho = \sqrt[n]{R}$$

Argumentos

$$\beta = n.\alpha$$

$$\alpha = \frac{\beta + k.360}{n} \text{ con } 0 \leq k < n$$

Ejemplos

$$a) \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8_{180}} = \rho_{\alpha}$$

Cálculos Auxiliares

Pasaje de forma binómica a polar

$$-8 = 8_{180}$$

$$\sqrt[3]{8_{180}} = \rho_{\alpha} \rightarrow 8_{180} = (\rho_{\alpha})^3 = \rho^3_{3.\alpha}$$

$$8_{180} = \rho^3_{3.\alpha}$$

Módulo

$$\rho^3 = 8 \rightarrow \rho = \sqrt[3]{8} \rightarrow \rho = 2$$

Argumentos

$$3\alpha = 180$$

$$\alpha = \frac{180}{3} = 60^\circ$$

$$\alpha_1 = \frac{(180 + 360)}{3} = \frac{540}{3} = 180^\circ$$

$$\alpha_2 = \frac{(180 + 2.360)}{3} = \frac{900}{3} = 300^\circ$$

Conclusión

	Forma polar	Forma binómica
	2_{60°	$2.\cos 60 + 2.\sen 60i = 1 + 1,73i$
$\sqrt[3]{-8}$	2_{180°	$2.\cos 180 + 2.\sen 180i = -2$
	2_{300°	$2.\cos 300 + 2.\sen 300i = 1 - 1,73i$

En definitiva

$$\sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 + 1,73i \\ -2 \\ 1 - 1,73i \end{cases}$$

$$b) \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1_{270}} = \rho_{\alpha}$$

Cálculos Auxiliares

Pasaje de forma binómica a polar

Módulo

$$-i = 1_{270}$$

$$\sqrt[3]{1_{270^\circ}} = \rho_{\alpha} \rightarrow 1_{270^\circ} = (\rho_{\alpha})^3 = \rho^3_{3.\alpha}$$

$$1_{270^\circ} = \rho^3_{3.\alpha}$$

Módulo

$$\rho^3 = 1 \rightarrow \rho = \sqrt[3]{1} = 1$$

Argumentos

$$3.\alpha = 270^\circ$$

$$\alpha = \frac{270^\circ}{3} = 90^\circ$$

$$\alpha_1 = \frac{(270 + 360)}{3} = \frac{630}{3} = 210^\circ$$

$$\alpha_2 = \frac{(270 + 2.360)}{3} = \frac{990}{3} = 330^\circ$$

Conclusión

	Forma polar	Forma binómica
	1_{90°	$\cos 90^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ i = i$
$\sqrt[3]{-i}$	1_{210°	$\cos 210^\circ + \operatorname{sen} 210^\circ i = -0,86 - 0,5i$
	1_{330°	$\cos 330^\circ + \operatorname{sen} 330^\circ i = 0,86 - 0,5i$

En definitiva

$$\sqrt[3]{-i} = \begin{cases} i \\ -0,86 - 0,5i \\ 0,86 - 0,5i \end{cases}$$

$$c) \sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}_{45^\circ}} = \sqrt[8]{2}_{45^\circ} = \rho_\alpha$$

Cálculos Auxiliares

Pasaje de forma binómica a polar

Módulo

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \rightarrow \rho = \sqrt{2}$$

Argumento

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ \alpha + 180^\circ = 225^\circ \end{cases}$$

Conclusión

$$1 + i = \sqrt{2}_{45^\circ}$$

$$\sqrt[8]{2}_{45^\circ} = \rho_\alpha \rightarrow 2_{45^\circ} = (\rho_\alpha)^8 \rightarrow 2_{45^\circ} = \rho^8_{8.\alpha}$$

Módulo

$$\rho^8 = 2 \rightarrow \rho = \sqrt[8]{2}$$

Argumentos

$$8\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = \frac{45}{8} = 5^{\circ}37'30''$$

$$\alpha_1 = \frac{(45^{\circ} + 360)}{8} = \frac{405}{8} = 50^{\circ}37'30''$$

$$\alpha_2 = \frac{(45^{\circ} + 2.360)}{8} = \frac{765}{8} = 95^{\circ}37'30''$$

$$\alpha_3 = \frac{(45^{\circ} + 3.360)}{8} = \frac{1125}{8} = 140^{\circ}37'30''$$

Conclusión

	Forma polar	Forma binómica
	$\sqrt[8]{2}_{5^{\circ}37'30''}$	$\sqrt[8]{2}\cos 5^{\circ}37'30'' + \sqrt[8]{2}\operatorname{sen} 5^{\circ}37'30''i = 1,08 + 0,10i$
$\sqrt[4]{1+i}$	$\sqrt[8]{2}_{50^{\circ}37'30''}$	$\sqrt[8]{2}\cos 50^{\circ}37'30'' + \sqrt[8]{2}\operatorname{sen} 50^{\circ}37'30''i = 0,69 + 0,84i$
	$\sqrt[8]{2}_{95^{\circ}37'30''}$	$\sqrt[8]{2}\cos 95^{\circ}37'30'' + \sqrt[8]{2}\operatorname{sen} 95^{\circ}37'30''i = -0,10 + 1,08i$
	$\sqrt[8]{2}_{140^{\circ}37'30''}$	$\sqrt[8]{2}\cos 140^{\circ}37'30'' + \sqrt[8]{2}\operatorname{sen} 140^{\circ}37'30''i = -0,84 + 0,69i$

En definitiva

$$\sqrt[4]{1+i} = \begin{cases} 1,08 + 0,10i \\ 0,69 + 0,84i \\ -0,10 + 1,08i \\ -0,84 + 0,69i \end{cases}$$

$$d) \sqrt{-25} = \sqrt{25_{180^\circ}} = \rho_\alpha$$

Cálculos Auxiliares
Pasaje de forma binómica a polar
 $-25 = 25_{180^\circ}$

$$\sqrt{25_{180^\circ}} = \rho_\alpha \rightarrow 25_{180^\circ} = (\rho_\alpha)^2 = \rho_{2\alpha}^2$$

Módulo

$$\rho^2 = 25 \rightarrow \rho = \sqrt{25} \rightarrow \rho = 5$$

Argumentos

$$2\alpha = 180$$

$$\alpha = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

$$\alpha_1 = \frac{(180 + 360)}{2} = \frac{540}{2} = 270^\circ$$

Conclusión

	Forma polar	Forma binómica
$\sqrt{-25}$	5_{90°	$5\cos 90 + 5\operatorname{sen} 90i = 5i$
	5_{270°	$5\cos 270 + 5\operatorname{sen} 270i = -5i$

En definitiva

$$\sqrt{-25} = \begin{cases} 5i \\ -5i \end{cases}$$

Trabajo práctico N° 7: Operaciones con números complejos III

1- Pasar de forma binómica a forma polar los siguientes números complejos:

a) $z_3 = 2 - 6i$ (1 punto)

b) $z_4 = -4 - 3i$ (1 punto)

2- Pasar de forma polar a binómica los siguientes números complejos:

a) $z_1 = \rho_\alpha = 8\frac{\pi}{4}$ (1 punto)

b) $z_2 = \rho_\alpha = 6\frac{2}{3}\pi$ (1 punto)

3- Resolver las siguientes raíces de números complejos:

a) $\sqrt[3]{-27} =$ (2 puntos)

b) $\sqrt[4]{2 + 2i} =$ (2 puntos)

c) $\sqrt[5]{-i} =$ (2 puntos)