

Barranqueras, 17 de agosto de 2021

Establecimiento:

E.E.T N° 2 “Gral. San Martín”

Espacio curricular:

MATEMÁTICA

Profesor: ROJAS, César Ariel

Cursos:

1ro 1ra Electrónica

1ro 2da Electromecánica

1ro 3ra Construcciones

TRABAJO PRÁCTICO N° 6:
Operaciones con números complejos II

-FECHA DE PRESENTACIÓN: martes
31 de agosto

NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS:

Dos números complejos se dicen conjugados si tienen la misma parte real y la parte imaginaria con signos contrarios.

<i>Complejo (Z)</i>	<i>conjugado ($\bar{z}$)</i>
$(a + bi)$	$(a - bi)$
$(a - bi)$	$(a + bi)$
$(-a + bi)$	$(-a - bi)$
$(-a - bi)$	$(-a + bi)$

Ejemplos:

$$* Z = (3 + 2i) \rightarrow \bar{Z} = (3 - 2i)$$

$$* Z = (3 - 2i) \rightarrow \bar{Z} = (3 + 2i)$$

$$* Z = (-3 + 2i) \rightarrow \bar{Z} = (-3 - 2i)$$

$$* Z = (-3 - 2i) \rightarrow \bar{Z} = (-3 + 2i)$$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS:

Cuando se multiplica dos números complejos conjugados el resultado es un NÚMERO REAL, positivo.

$$z = (a + bi) \rightarrow \bar{z} = (a - bi)$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) = a \cdot a - a \cdot bi + bi \cdot a - bi \cdot bi \\ &= a^2 - abi + abi - b^2 \cdot i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

En conclusión:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

La multiplicación entre un número complejo y su conjugado se puede resolver aplicando la propiedad distributiva o la fórmula, resolvemos de las dos maneras, y el/la estudiante podrá elegir cualquiera de las dos maneras.

Ejemplo I:

Forma I, aplicando propiedad distributiva:

$$Z = (3 - 2i) \rightarrow \bar{Z} = (3 + 2i)$$

$$\begin{aligned} Z \cdot \bar{Z} &= (3 - 2i) \cdot (3 + 2i) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2i - 2i \cdot 3 - 2i \cdot 2i \\ &= 9 + 6i - 6i - 4i^2 = 9 - 4 \cdot (-1) = 9 + 4 = 13 \end{aligned}$$

Forma II, aplicando la propiedad:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot (a - bi) &= a^2 + b^2 = Z \cdot \bar{Z} = (3 - 2i) \cdot (3 + 2i) \\ &= 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13 \end{aligned}$$

Ejemplo II:

Forma I, aplicando propiedad distributiva:

$$Z = (-3 + i) \rightarrow \bar{Z} = (-3 - i)$$

$$\begin{aligned} Z \cdot \bar{Z} &= (-3 + i) \cdot (-3 - i) \\ &= -3 \cdot (-3) - 3 \cdot (-i) + i \cdot (-3) + i \cdot (-i) \\ &= 3^2 + 3i - 3i - i^2 = 9 - (-1) = 9 + 1 = 10 \end{aligned}$$

Forma II, aplicando la propiedad:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

$$Z = (-3 + i) \rightarrow \bar{Z} = (-3 - i)$$

$$Z \cdot \bar{Z} = (-3 + i) \cdot (-3 - i) = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$$

DIVISIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS

Para dividir dos complejos se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, así el denominador pasará a ser un número real.

Finalmente se separan la parte real y la parte imaginaria.

*Supongamos que: $Z_1 = (a + bi)$; $Z_2 = (c + di)$,
resolvamos la división entre Z_1 y Z_2 .*

$$\begin{aligned} Z_1 : Z_2 &= \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{a \cdot c - a \cdot di + bi \cdot c - bi \cdot di}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{a \cdot c - a \cdot di + bc \cdot i - bd \cdot i^2}{c^2 + d^2} = \frac{a \cdot c - a \cdot di + bc \cdot i - bd \cdot (-1)}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{a \cdot c - a \cdot di + bc \cdot i + bd}{c^2 + d^2} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (b \cdot c - a \cdot d)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

CONCLUSIÓN

$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (b \cdot c - a \cdot d)i}{c^2 + d^2}$$

La división entre números complejos se puede resolver aplicando la propiedad distributiva o la fórmula, resolvemos de las dos maneras, y el/la estudiante podrá elegir cualquiera de las dos maneras.

Ejemplos:

Forma I, aplicando propiedad distributiva:

Dados $Z_1 = (3 - 2i)$ y $Z_2 = (-5 - 7i)$, Resolver $Z_1 : Z_2$

$$\begin{aligned}\frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{(3 - 2i)}{(-5 - 7i)} = \frac{(3 - 2i)}{(-5 - 7i)} \cdot \frac{(-5 + 7i)}{(-5 + 7i)} \\ &= \frac{3 \cdot (-5) + 3 \cdot 7i - 2i \cdot (-5) - 2i \cdot 7i}{5^2 + 7^2} \\ &= \frac{-15 + 21i + 10i - 14i^2}{25 + 49} = \frac{-15 + 31i - 14 \cdot (-1)}{74} \\ &= \frac{-15 + 14 + 31i}{74} = \frac{-1 + 31i}{74} = \frac{-1}{74} + \frac{31i}{74}\end{aligned}$$

Forma II, aplicando la propiedad: $\frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (b \cdot c - a \cdot d)i}{c^2 + d^2}$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(3 - 2i)}{(-5 - 7i)} \rightarrow a = 3; b = -2; c = -5; d = -7$$

$$\begin{aligned}\frac{(3 - 2i)}{(-5 - 7i)} &= \frac{(a \cdot c + b \cdot d) + (b \cdot c - a \cdot d)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{[3 \cdot (-5) + (-2) \cdot (-7)] + [(-2) \cdot (-5) - 3 \cdot (-7)] \cdot i}{5^2 + 7^2} \\ &= \frac{[-15 + 14] + [10 + 21]i}{25 + 49} = \frac{-1 + 31i}{74} = \frac{-1}{74} + \frac{31i}{74}\end{aligned}$$

EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE DIVISIÓN USANDO PROPIEDAD DISTRIBUTIVA:

Ver el video → <https://www.youtube.com/watch?v=XV5buDdtUEU>

Dados $Z_1 = -4 + 5i$; $Z_2 = 8 - 2i$; $Z_3 = -9 - 12i$

Encontrar el valor de:

$$\begin{aligned}
 1) \frac{Z_1}{Z_2} &= \frac{(-4 + 5i)}{(8 - 2i)} = \frac{(-4 + 5i)}{(8 - 2i)} \cdot \frac{(8 + 2i)}{(8 + 2i)} = \frac{-4 \cdot 8 - 4 \cdot 2i + 5i \cdot 8 + 5i \cdot 2i}{8^2 + 2^2} \\
 &= \frac{-32 - 8i + 40i + 10 \cdot i^2}{68} = \frac{-32 + 32i + 10 \cdot (-1)}{68} \\
 &= \frac{-32 + 32i - 10}{68} = \frac{-42 + 32i}{68} = \frac{-42}{68} + \frac{32i}{68} = \frac{-21}{34} + \frac{8i}{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \frac{Z_2}{Z_3} &= \frac{(8 - 2i)}{(-9 - 12i)} = \frac{(8 - 2i)}{(-9 - 12i)} \cdot \frac{(-9 + 12i)}{(-9 + 12i)} \\
 &= \frac{8 \cdot (-9) + 8 \cdot 12i - 2i \cdot (-9) - 2i \cdot 12i}{9^2 + 12^2} \\
 &= \frac{-72 + 96i + 18i - 24i^2}{225} = \frac{-72 + 114i - 24 \cdot (-1)}{225} \\
 &= \frac{-72 + 114i + 24}{225} = \frac{-48 + 114i}{225} = -\frac{48}{225} + \frac{114i}{225} \\
 &= -\frac{16}{75} + \frac{38i}{75}
 \end{aligned}$$

POTENCIA DEL NÚMERO IMAGINARIO:

Elevar a una potencia implica multiplicar la base tantas veces como lo indique el exponente. Vamos a analizar qué sucede cuando elevamos a un exponente determinado el número i .

Ver el video → https://www.youtube.com/watch?v=Qv_bvmJJfV0&t=119

$$* i^0 = 1$$

$$* i^1 = i$$

$$* i^2 = -1$$

$$* i^3 = i^2 \cdot i^1 = -1 \cdot i = -i$$

$$* i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$a) i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$$

$$b) i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$c) i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

Mas ejemplos.

Ver el video→

<https://www.youtube.com/watch?v=yeNezaqcDdk>

$$e) i^{21} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^1 = i^{4+4+4+4+4} \cdot i^1 = i^{4 \cdot 5} \cdot i \\ = (i^4)^5 \cdot i = (1)^5 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$f) i^{32} = i^{4 \cdot 8} = (i^4)^8 = (1)^8 = 1$$

$$g) i^{349} = i^{4 \cdot 87} \cdot i^1 = (i^4)^{87} \cdot i = 1^{87} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$h) i^{47} = i^{4 \cdot 11} \cdot i^3 = (i^4)^{11} \cdot i^3 = 1^{11} \cdot (-i) = 1 \cdot (-i) = -i$$

$$i) i^{75} = (i^4)^{18} \cdot i^3 = (1)^{18} \cdot (-i) = 1 \cdot (-i) = -i$$

Generalización y producción de fórmula

Si tomamos un número natural n y lo dividimos entre 4, esta tendrá un cociente y un resto, que cumplen con las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r/ & c \end{array} \quad \begin{array}{l} 1) n = 4 \cdot c + r \\ 2) 0 \leq r < 4 \end{array}$$

Ejemplo. Supongamos que $n=137$

$$\begin{array}{r|l} 137 & 4 \\ \hline 17 & 34 \\ \hline & 1/ \end{array}$$

1) $4 \cdot 34 + 1 = 136 + 1 = 137$
 2) $0 \leq 1 < 4$

Tomando estas condiciones de las divisiones podemos decir que:

$$i^n = i^{4 \cdot c + r} = i^{4 \cdot c} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r \text{ en conclusión } i^n = i^r$$

FÓRMULA:

$$i^n = i^r, \text{ con } 0 \leq r < 4$$

Vamos a resolver los ejercicios e), f), g), h), i) utilizando la fórmula: $i^n = i^r$, luego el/la estudiante podrá elegir el método:

	C. Auxiliares
e) $i^{21} = i^1 = i$	$\begin{array}{r l} 21 & 4 \\ \hline 1/ & 5 \end{array}$
f) $i^{32} = i^0 = 1$	$\begin{array}{r l} 32 & 4 \\ \hline 0/ & 8 \end{array}$
g) $i^{349} = i^1 = i$	$\begin{array}{r l} 349 & 4 \\ \hline 29 & 87 \\ \hline 1/ & \end{array}$

$$h) i^{47} = i^3 = -i \quad \begin{array}{r|l} 47 & 4 \\ \hline 07 & 11 \end{array}$$

$$i) i^{75} = i^3 = -i \quad \begin{array}{r|l} \text{3/} & 4 \\ 75 & \\ \hline 35 & 18 \end{array}$$

3/

USO DE LA CALCULADORA

Como indica la fórmula, calcular i^n es equivalente a calcular i^r , donde r es resto de la división entera entre n y 4.

Si realizamos la división entre n y 4, con la calculadora, la parte decimal solo pueden ser cuatros:

- No tiene parte decimal → Resto cero.
- Parte decimal 25 → Resto uno.
- Parte decimal → 5 décimos, o sea 50 → Resto dos.
- Parte decimal 75 → Resto tres.

Esquemáticamente

Parte decimal	Resto
No tiene	0
25	1
5 décimos, o sea 50	2
75	3

Ejemplos:

$$a) i^{273} = i^1 = i \quad \begin{array}{l} \text{Cálculos Auxiliares} \\ 273:4 = 68,25 \end{array}$$

$$P. Decimal = 25 \rightarrow Resto = 1$$

$$b) i^{17427} = i^3 = -i$$

$$17427:4 = 4356,75$$

$$c) i^{341916} = i^0 = 1$$

$$P.Decimal = 75 \rightarrow Resto = 3$$

$$341916:4 = 85479$$

$$d) i^{392950} = i^2 = -1$$

$$P.Decimal = no\ tiene \rightarrow Resto = 0$$

$$392950:4 = 98237,5$$

$$P.Decimal = 5\ decimos\ (o\ sea\ 50)$$

$$\rightarrow Resto = 2$$

TRIÁNGULO DE PASCAL

Es una construcción aritmética que tiene n filas, todas empiezan y terminan en 1, y los términos centrales provienen de sumar los términos consecutivos de la fila superior.

Ver video → <https://www.youtube.com/watch?v=9ri5dwV2K6E>

							1																
							1	(+)	1														
								↓															
							1	(+)	2	(+)	1												
								↓															
							1	(+)	3	(+)	3	(+)	1										
								↓															
							1	(+)	4	(+)	6	(+)	4	(+)	1								
								↓															
							1	(+)	5	(+)	10	(+)	10	(+)	5	(+)	1						
								↓															
							1	(+)	6	(+)	15	(+)	20	(+)	15	(+)	6	(+)	1				
								↓															
							1	(+)	7	(+)	21	(+)	35	(+)	35	(+)	21	(+)	7	(+)	1		
								↓															
							1	(+)	8	(+)	28	(+)	56	(+)	70	(+)	56	(+)	28	(+)	8	(+)	1
								↓															
							1		8		28		56		70		56		28		8		1
														</									

PRODUCTOS NOTABLES

El Triángulo de Pascal se utiliza para encontrar los coeficientes de la expresión: $(a + b)^n$.

Así, la fila uno determina los coeficientes de $(a + b)^0$, la fila dos los coeficientes de $(a + b)^1$, la fila tres los coeficientes de $(a + b)^2$, etc.

Esquemáticamente

				1																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																										</
--	--	--	--	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

Con respecto al exponente de las variables, una decrece (de a una unidad) empezando desde n hasta cero y la otra variable crece desde cero hasta n.

Ejemplos:

1) Desarrollar $\rightarrow (a + b)^3$

$$\boxed{1} \boxed{3} \boxed{3} \boxed{1} \rightarrow (a + b)^3$$

$$\begin{aligned}
 (a + b)^3 &= 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 \\
 &= 1 \cdot a^3 \cdot 1 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + 1 \cdot 1 \cdot b^3 \\
 &= a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3
 \end{aligned}$$

Conclusión:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$$

En caso que la base de la potencia sea una resta, se intercalan los signos positivos y negativos, empezando por el positivo.

$$(a - b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$$

2) Desarrollar $\rightarrow (a - b)^4$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow (a + b)^4$$

$$\begin{aligned} (a - b)^4 &= 1a^4b^0 - 4a^3b^1 + 6a^2b^2 - 4a^1b^3 + 1a^0b^4 \\ &= 1 \cdot a^4 \cdot 1 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 6a^2b^2 - 4 \cdot a \cdot b^3 + 1 \cdot 1 \cdot b^4 \\ &= a^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 6a^2b^2 - 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4 \end{aligned}$$

Conclusión

$$(a - b)^4 = a^4 - 4 \cdot a^3 \cdot b + 6a^2b^2 - 4 \cdot a \cdot b^3 + b^4$$

3) Desarrollar $\rightarrow (a + b)^5$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow (a + b)^5$$

$$\begin{aligned} (a + b)^5 &= 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 \\ &\quad + 1a^0b^5 \\ &= 1a^5 \cdot 1 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 \\ &\quad + 1 \cdot 1b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \end{aligned}$$

Conclusión

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

POTENCIA DE NÚMEROS COMPLEJOS

Resolver una potencia de números complejos es equivalente a desarrollar el producto notable $(a + bi)^n$. Lo haremos ocupando los conceptos antes desarrollados.

Ejemplos

1) Desarrollar $\rightarrow (a + bi)^3$

$$\boxed{1 \quad 3 \quad 3 \quad 1} \rightarrow (a + b)^3$$

$$\begin{aligned} (a + bi)^3 &= 1a^3(bi)^0 + 3a^2(bi)^1 + 3a^1(bi)^2 \\ &\quad + 1a^0(bi)^3 \\ &= 1.a^3.1 + 3.a^2.b.i + 3.a.b^2.i^2 \\ &\quad + 1.1.b^3.i^3 \\ &= a^3 + 3.a^2.b.i + 3.a.b^2.(-1) \\ &\quad + b^3.(-i) = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i \end{aligned}$$

Cálculos
Auxiliares.

$$\begin{aligned} * (bi)^0 \\ &= b^0.i^0 = 1.1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * (bi)^1 \\ &= b^1.i^1 = b.i \end{aligned}$$

$$* i^2 = -1$$

$$* i^3 = -i$$

Conclusión:

$$(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$$

2) Desarrollar $\rightarrow (a - b)^4$

$$\boxed{1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1} \rightarrow (a + b)^4$$

$$\begin{aligned}
 (a - bi)^4 &= 1a^4(bi)^0 - 4a^3(bi)^1 + 6a^2(bi)^2 \\
 &\quad - 4a^1(bi)^3 + 1a^0(bi)^4 \\
 &= 1.a^4.1 - 4.a^3.bi + 6a^2b^2.i^2 \\
 &\quad - 4.a.b^3.i^3 + 1.1.b^4.i^4 \\
 &= a^4 - 4.a^3.b.i + 6a^2b^2.(-1) \\
 &\quad - 4.a.b^3.(-i) + b^4.1 \\
 &= a^4 - 4.a^3.b.i - 6a^2b^2 + 4.a.b^3.i \\
 &\quad + b^4
 \end{aligned}$$

Cálculos
Auxiliares

$$* (bi)^0 = 1$$

$$* (bi)^1 = bi$$

$$* (i)^2 = -1$$

$$* (i)^3 = -i$$

$$* (i)^4 = 1$$

Conclusión

$$(a - bi)^4 = a^4 - 4.a^3.b.i - 6a^2b^2 + 4.a.b^3.i + b^4$$

3) Desarrollar $\rightarrow (a + b)^5$

$$\boxed{1} \boxed{5} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{5} \boxed{1} \rightarrow (a + b)^5$$

$$\begin{aligned}
 (a + bi)^5 &= 1a^5(bi)^0 + 5a^4(bi)^1 + 10a^3(bi)^2 \\
 &\quad + 10a^2(bi)^3 + 5a^1(bi)^4 + 1a^0(bi)^5 \\
 &= 1a^5.1 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2i^2 + 10a^2b^3i^3 \\
 &\quad + 5a^1b^4i^4 + 1.1b^5i^5 \\
 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2(-1) + 10a^2b^3(-i) \\
 &\quad + 5ab^4(1) + b^5(i) \\
 &= a^5 + 5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3i + 5ab^4 \\
 &\quad + b^5i =
 \end{aligned}$$

Cálculos
Auxiliares.

$$* (bi)^0 = 1$$

$$* (bi)^1 = bi$$

$$* (i)^2 = -1$$

$$* (i)^3 = -i$$

$$* (i)^4 = 1$$

$$* i^5 = i^1 = i$$

Conclusión

$$(a + bi)^5 = a^5 + 5a^4b - 10a^3b^2 - 10a^2b^3i + 5ab^4 + b^5i$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 7: Operaciones con números complejos II

1) *Dados los siguientes números complejos:*

$$Z_1 = (3 - 2i); Z_2 = (-7 - 5i); Z_3 = (-4 + 3i)$$

–Realizar las siguientes operaciones:

$$a) \frac{Z_1}{Z_2} =$$

$$b) \frac{Z_2}{Z_3} =$$

2) Calcular las potencias de i .

$$a) i^{34305} =$$

$$b) i^{31583} =$$

$$c) i^{227176} =$$

$$d) i^{2278} =$$

3) Calcular la potencia $(a + b)^n$, usando el triángulo de Pascal.

$$a) (a - b)^7 =$$

4) Calcular la potencia del número complejo.

$$a) (a - bi)^7 =$$