

Barranqueras, 26 de julio de 2021

Alternativas de acompañamiento pedagógico ante la Emergencia Sanitaria

Establecimiento:

E.E.T N° 2 “Gral. San Martín”

Espacio curricular:

MATEMÁTICA

Profesor: ROJAS, César Ariel

Cursos:

1^{ro} 1^{ra} Electrónica

1^{ro} 2^{da} Electromecánica

1^{ro} 3^{ra} Construcciones

AÑO: 2021

CUESTIONES A TENER EN CUENTA PARA LA PRESENTACIÓN DEL TRABAJO

1- Primera hoja:

- Carátula con el nombre de la asignatura:
- Nombre del alumno:
- Año y división que cursa:
- Nombre del profesor:

Esta clase está compuesta por teoría escrita, ejemplos y contenido audio visual, deben transcribir todo a la carpeta y resolver las actividades que se encuentran bajo el título: TRABAJO PRÁCTICO N°5: **OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS I**

2- CRITERIOS DE PRESENTACION DEL TRABAJO:

- El trabajo debe tener CARÁTULA, y los EJERCICIOS RESUELTOS, con los cálculos auxiliares.
- Las hojas deben estar enumeradas de La forma x de y.
- Las fotos de la resolución de los ejercicios y de los cálculos auxiliares deben estar pegados en un documento de **WORD**.

-Abrir el correo y completara la sección ASUNTOS con la siguiente información: Apellidos y Nombres (completos), año que cursa, especialidad, nombre del trabajo práctico.

-Adjuntar el archivo correspondiente al Trabajo Práctico N°5.

-Enviar al correo: cesar_rojas1974@yahoo.com.ar

-FECHA DE PRESENTACIÓN: lunes 09 de agosto

CLASE N° 5

TRABAJO PRÁCTICO N° 5 “NÚMEROS COMPLEJOS

INTRODUCCIÓN

En esta guía vamos a recorrer, los distintos conjuntos numéricos, para ello, utilizamos un concepto matemático conocido por ustedes: las ECUACIONES.

Este recorrido nos servirá para repasar los distintos conjuntos y para adentrarnos en el estudio de nuevos números.

- Imaginá que solo conocés los **NÚMEROS NATURALES**→

$$\mathbf{N: \{1, 2, 3, 5, 6, 7 \dots \}}$$

Sin salir de **N** resolvé las ecuaciones:

$$\mathbf{a) \, x + 5 = 12; \, b) \, 3x = 12; \, c) \, 2x + 7 = 19; \, d) \, x + 12 = 5}$$

Resolución

$$\mathbf{a) \, x + 5 = 12 \rightarrow x = 12 - 5 \rightarrow x = 7 \in 1N}$$

1El símbolo **∈** indica que el elemento **a pertenece** al conjunto **A**.

$$b) 3x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{3} \rightarrow x = 4 \in N$$

$$c) 2x + 7 = 19 \rightarrow 2x = 19 - 7 \rightarrow 2x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{2} \rightarrow x = 6 \in N$$

$$d) x + 12 = 5 \rightarrow x = 5 - 12 \rightarrow x = -7 \notin N$$

- **Conclusión 1:** Sin salir del conjunto **N** se puede resolver las tres primeras ecuaciones, pero no la última, dado que su solución ya no es un número natural. Para encontrar la solución de la ecuación d) es necesario hurgar en otro conjunto:

NÚMEROS ENTEROS $\rightarrow Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

- Imagina, ahora, que solo conoces los **Z**, en este conjunto puede resolver el ejercicio d), ahora sin salir de **N** tratá de resolver la ecuación:

$$e) 2x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{2} = 3,5 \notin N$$

Conclusión 2: Como puedes observar no se puede resolver la ecuación e) en el conjunto **Z**, nuevamente es necesario explorar en otro conjunto el de los números **RACIONALES Q**:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, \text{ tal que, } a, b \in Z \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

- Imaginá que solo conoces los **Q** sin salir de ese conjunto resolvé:

$$f) 3x - 24 = -17; g) x^2 - 6x + 8 = 0; h) 2x^2 + x - 1 = 0; i) x^2 - 2 = 0$$

2 El símbolo $\notin$ indica que el elemento **a** no pertenece al conjunto **A**.

$$f) 3x - 24 = -17 \rightarrow 3x = -17 + 24 \rightarrow 3x = 7 \rightarrow x = \frac{7}{3} \in Q$$

$$g) x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow a = 1; b = -6; c = 8 \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \in Q \\ x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \in Q \end{cases}$$

$$h) 2x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow a = 2; b = 1; c = -1 \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} =$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \notin Q \\ x_2 = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \notin Q \end{cases}$$

$$i) x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2} = 1,414213562 \dots \notin Q$$

Conclusión 3: En el conjunto de los números **Q** puedes resolver las ecuaciones **f)**, **g)** y **h)** pero no la **i)**, nuevamente es necesario explorar en otro conjunto: el de los números **IRRACIONALES (I)** que son aquellos que no se pueden expresar como fracción.

Con este último conjunto se termina de formar el conjunto de los números **REALES (R)**, que es la unión de los **Q** y los **I**.

-Sin salir del conjunto de los números **REALES**, resolvé:

$$j) x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \sqrt{-1}$$

Para resolver la ecuación necesitamos un número que elevado al cuadrado de como resultado -1, tenemos dos candidatos 1 y -1.

$$\sqrt{-1} = \begin{cases} 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \neq -1 \text{ por lo tanto, } 1 \text{ no es solución} \\ (-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \neq -1 \text{ por lo tanto, } -1 \text{ no es solución} \end{cases}$$

Conclusión 3: No hay ningún número real, ni positivo ni negativo, cuyo cuadrado sea un número negativo³. Por lo tanto $\sqrt{-1}$ no es un número REAL.

NECESIDAD DE NUEVOS NÚMEROS

Como ocurrió en los casos anteriores se necesitan nuevos objetos matemáticos para seguir evolucionando en el edificio matemático, entonces la raíz cuadrada de -1 de ahora en más se denomina i ⁴, que obviamente no es un número REAL.

$$\sqrt{-1} = i$$

Aplicando pasaje de términos tenemos que:

$$\sqrt{-1} = i \rightarrow i^2 = -1$$

-Después de i surgen otros números

Video → <https://www.youtube.com/watch?v=4DfaNLB3g5Q>

-Resolvé la ecuación:

$$\begin{aligned} k) x^2 + 4 &= 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \rightarrow x = \pm\sqrt{4 \cdot (-1)} \rightarrow \\ &\rightarrow x = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} \rightarrow x = \pm 2 \cdot i \end{aligned}$$

³ Porque contradice la regla de los signos:

$$(+) \cdot (+) = +$$

$$(-) \cdot (-) = +$$

$$(+) \cdot (-) = -$$

$$(-) \cdot (+) = -$$

⁴ El número i se denomina **UNIDAD IMAGINARIO**

Conclusión 4: Observamos que después de i , surgen otros **números imaginarios** que son todos los de la forma: **(número real). i**

Por ejemplo: $2i, -2i, -7i, \frac{11}{3} \cdot i, \sqrt{5} i$

-Resolvé una nueva ecuación cuadrática:

Video → <https://www.youtube.com/watch?v=MEeaUU4Wc1g>

$$\begin{aligned}
 l) x^2 - 4x + 5 = 0 &\rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 5 \end{cases} \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \\
 &= \frac{4 \pm 2 \cdot i}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4 + 2i}{2} = \frac{4}{2} + \frac{2i}{2} = 2 + 1 \cdot i = 2 + i \\ x_2 = \frac{4 - 2i}{2} = \frac{4}{2} - \frac{2i}{2} = 2 - 1 \cdot i = 2 - i \end{cases} \\
 m) x^2 - 7x + 13 = 0 &\rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 13 \end{cases} \rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 52}}{2} \\
 &= \frac{7 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{3} \sqrt{-1}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{3} i}{2} = \\
 &= \begin{cases} x_1 = \frac{7 + \sqrt{3} i}{2} = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ x_2 = \frac{7 - \sqrt{3} i}{2} = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conclusión 4: Se puede observar que estos entes, los de la forma **(número real) + (número real).i** también son números imaginarios que se unen a los vistos anteriormente.

Ejemplo:

$$2 + i; 2 - i; \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; 3 + \frac{1}{4}i; \sqrt{5} - 3i; \dots etc.$$

A partir de que le dimos una entidad a la raíz cuadrada de menos uno, que no es un número real, sino la **unidad imaginaria i** , surgieron otros entes que los vamos a agrupar en un **nuevo conjunto numérico** que se denomina **NÚMEROS COMPLEJOS**.

Vamos a otórgale la formalidad que corresponde.

NÚMEROS COMPLEJOS

A los números de la forma **$a \pm bi$** se los denomina **números complejos**.

En el número complejo $z = a \pm bi$, se distinguen dos partes:

$$z = a \pm bi \rightarrow \begin{cases} a: \text{parte real} \\ bi: \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

- Observá que si **$bi = 0$** el número complejo solo tiene parte real.

Por lo tanto, **los números reales están INCLUIDOS en los números complejos**.

Ejemplos

$3, -5, \frac{1}{4}, y \sqrt{3}$ son números **reales** y, por tanto, **imaginarios**

- Si **$a = 0$** el número complejo solo tiene la parte imaginaria **bi** a estos números se los llama **IMAGINARIOS PUROS**.

$$3i, -5i, \sqrt{3}i, \frac{7}{3}i \text{ son } \textbf{imaginarios puros}$$

- Si **$b \neq 0$** el número complejo sí tiene parte imaginaria. A estos números se les llama **IMAGINARIOS**.

Ejemplos

$3 + 2i; -5 + \sqrt{3}i; 2i; i$ son números **complejos imaginarios**

En conclusión, hemos utilizado las ecuaciones para adentrarnos en los distintos conjuntos numéricos y definimos un nuevo conjunto: el de los **números complejos**. Vamos a mostrar la relación de inclusión de los distintos conjuntos numéricos a través de un esquema.

$$\text{Números Complejos } (C) \begin{cases} \text{Números Reales } (R) \\ \text{Números Imaginarios } (a + bi) \rightarrow \text{Imag. puros } bi \end{cases}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En este apartado vamos a realizar las operaciones matemáticas, en este nuevo conjunto numérico.

-Para **SUMAR** dos o más números complejos, se suman las partes reales, por un lado y por el otro las partes imaginarias

Ver video → <https://www.youtube.com/watch?v=nudZJB-wQGk>

Realizá las siguientes sumas:

$$a) z_1 = (5 + 2i); z_2 = (4 + 7i) \rightarrow \text{Realizá } z_1 + z_2$$

$$\begin{aligned} a) (5 + 2i) + (4 + 7i) &= 5 + 2i + 4 + 7i = 5 + 4 + 2i + 7i \\ &= 9 + 9i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) 10 - 8i + 15 - 6i - 3 &= 10 + 15 - 3 - 8i - 6i \\ &= 22 - 14i \end{aligned}$$

-Para **RESTAR** dos números complejos se saca los paréntesis, cambiando los signos de los que estén precedido por un signo negativo, luego se opera como en la suma.

$$\begin{aligned} a) (7 + 2i) - (5 - 9i) &= 7 + 2i - 5 + 9i = 7 - 5 + 2i + 9i \\ &= 2 + 11i \end{aligned}$$

Más ejemplos

$$\begin{aligned} a) (-12 - 11i) + (-3 + 8i) &= -12 - 11i - 3 + 8i \\ &= -12 - 3 - 11i + 8i = -15 - 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) (14 - i) - (-3 + 2i) &= 14 - i + 3 - 2i \\ &= 14 + 3 - i - 2i = 17 - 3i \end{aligned}$$

EJERCICIOS COMBINADOS CON SUMAS Y RESTAS

a) Ver video → https://www.youtube.com/watch?v=m3Oeu_fnnXk

$$z_1 = 3 - 5i; z_2 = -6 + 8i; z_3 = -12 - 9i$$

RESOLVÉ:

$$a) z_1 + z_2 =$$

$$b) z_2 - z_3 =$$

$$c) z_3 + z_2 - z_1 =$$

$$\begin{aligned} a) z_1 + z_2 &= (3 - 5i) + (-6 + 8i) = 3 - 5i - 6 + 8i \\ &= 3 - 6 - 5i + 8i = -3 + 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) z_2 - z_3 &= (-6 + 8i) - (-12 - 9i) = -6 + 8i + 12 + 9i \\ &= -6 + 12 + 8i + 9i = 6 + 17i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) z_3 + z_2 - z_1 &= (-12 - 9i) + (-6 + 8i) - (3 - 5i) \\ &= -12 - 9i - 6 + 8i - 3 + 5i \\ &= -12 - 6 - 3 - 9i + 8i + 5i = -21 + 4i \end{aligned}$$

Más ejercicios....

$$z_1 = 3 - 5i; z_2 = -6 + 8i; z_3 = -12 - 9i$$

RESOLVÉ

$$a) z_1 - z_3 + z_2$$

$$\begin{aligned} a) z_1 - z_3 + z_2 &= (3 - 5i) - (-12 - 9i) + (-6 + 8i) \\ &= 3 - 5i + 12 + 9i - 6 + 8i \\ &= 3 + 12 - 6 - 5i + 9i + 8i = 9 + 12i \end{aligned}$$

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para multiplicar dos números complejos se aplica la propiedad distributiva, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

DESARROLLO

$$\begin{aligned}(a + bi).(c + di) &= a.c + a.di + bi.c + bi.di \\&= a.c + ad.i + bc.i + bd.i^2 \\&= a.c + ad.i + bc.i + bd.(-1) \\&= a.c + ad.i + bc.i - bd \\&= (a.c - b.d) + (a.d + b.c).i\end{aligned}$$

EN RESUMEN:

-Para multiplicar dos números complejos se puede aplicar la propiedad distributiva teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ o aplicando la propiedad:

$$(a + bi).(c + di) = (a.c - b.d) + (a.d + b.c).i$$

Presentamos un ejemplo y los resolvemos por ambos métodos y el estudiante elegirá de qué manera resuelve:

-MÉTODO 1: Aplicar la propiedad distributiva teniendo en cuenta que

$$i^2 = -1.$$

$$z_1 = 3 + 2i; z_2 = 5 - 7i \rightarrow \text{calcular: } z_1.z_2$$

$$\begin{aligned}z_1.z_2 &= (3 + 2i).(5 - 7i) = 15 - 21i + 10i - 14i^2 \\&= 15 - 11i - 14.(-1) = 15 - 11i + 14 \\&= 15 + 14 - 11i = 29 - 11i\end{aligned}$$

-MÉTODO 2: Aplicar la fórmula.

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (5 - 7i) \rightarrow a = 3; b = 2; c = 5; d = -7$$

$$\rightarrow (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i$$

$$= (3 \cdot 5 - 2 \cdot (-7)) + (3 \cdot (-7) + 2 \cdot 5) \cdot i$$

$$= (15 + 14) + (-21 + 10) \cdot i = 29 - 11i$$

Resolvé las siguientes MULTIPLICACIONES.

Ver video [→ https://www.youtube.com/watch?v=38DPFbTKUpQ](https://www.youtube.com/watch?v=38DPFbTKUpQ)

Dado los números complejos:

$$z_1 = -3 - 5i; z_2 = 7 - 9i; z_3 = -6 - i \rightarrow \text{Encontrar:}$$

$$a) z_1 \cdot z_2 =$$

$$b) z_3 \cdot z_1 =$$

$$\begin{aligned} a) z_1 \cdot z_2 &= (-3 - 5i) \cdot (7 - 9i) = -3 \cdot 7 - 3 \cdot (-9i) - 5i \cdot 7 - \\ &5i \cdot (-9i) = -21 + 27i - 35i - 5 \cdot (-9) \cdot i \cdot i = -21 - 8i + 45 \cdot i^2 = \\ &-21 - 8i + 45 \cdot (-1) = -21 - 8i - 45 = -21 - 45 - 8i = -66 - 8i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) z_3 \cdot z_1 &= (-6 - i) \cdot (-3 - 5i) \\ &= -6 \cdot (-3) - 6 \cdot (-5i) - i \cdot (-3) - i \cdot (-5i) \\ &= 18 + 30i + 3i + 5 \cdot i^2 = 18 + 33i + 5 \cdot (-1) \\ &= 18 + 33i - 5 = 13 + 33i \end{aligned}$$

Mas ejemplos:

Dados los números complejos:

$$z_1 = -3 - 5i$$

$$z_2 = 7 - 9i$$

$$z_3 = -6 + i$$

Encontrar:

$$\begin{aligned} a) z_2 \cdot z_3 &= (7 - 9i) \cdot (-6 + i) = 7 \cdot (-6) + 7 \cdot i - 9i \cdot (-6) - 9i \cdot i \\ &= -42 + 7i + 54i - 9 \cdot i^2 = -42 + 61i - 9 \cdot (-1) \\ &= -42 + 61i + 9 = -33 + 61i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) z_1 \cdot z_2 &= (-3 - 5i) \cdot (7 - 9i) \\ &= -3 \cdot 7 - 3 \cdot (-9i) - 5i \cdot 7 - 5i \cdot (-9i) \\ &= -21 + 27i - 35i + 45 \cdot i^2 = -21 - 8i + 45 \cdot (-1) \\ &= -21 - 8i - 45 = -66 - 8i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) -z_1 + z_2 \cdot z_3 - 3i &= -(-3 - 5i) + (7 - 9i) \cdot (-6 + i) - 3i \\ &= 3 + 5i + 7 \cdot (-6) + 7 \cdot i - 9i \cdot (-6) - 9i \cdot i - 3i \\ &= 3 + 5i - 42 + 7i + 54i - 9 \cdot i^2 - 3i \\ &= 3 + 5i - 42 + 7i + 54i - 9 \cdot (-1) - 3i \\ &= 3 + 5i - 42 + 7i + 54i + 9 - 3i \\ &= 3 - 42 + 9 + 5i + 7i + 54i - 3i = -30 + 63i \end{aligned}$$

TRABAJO PRÁCTICO N° 5: OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS I

1) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 3x + 4 = 0$

b) $x^2 - x + 7 = 0$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

2) Resolver las siguientes multiplicaciones.

a) $(7 + 2i) \cdot (7 - 2i) =$

b) $(3 - 5i) \cdot (3 - 5i) =$

c) $(4 + 2i) \cdot (5 - 3i) =$

3) Resolver las siguientes operaciones

combinadas:

a) $\sqrt{-16} + \sqrt{-25} - \sqrt{36} - \sqrt{-49} + \sqrt{-1} =$

b) $(5 - 4i) - (-3 + 2i) - (6 - 4i) =$

c) $-(2 - 3i) + (3 - 5i) \cdot (7 + 2i) + i =$

d) $(3 + 4i) \cdot (6 - i) - 5i =$