

Matemática

Actividades de Matemáticas
4°1° S.C.

Año 2021

EEA N° 3

Alumno:

Profesor: López, Vanina S.



Presentación



Hola a todos. Mi nombre es Vanina López y los voy a estar acompañando durante todo el año en el espacio curricular de Matemáticas de 4°1° Segundo Ciclo.

Debido a la actualidad que estamos viviendo y que soy una persona de riesgo, vamos a estar trabajando en forma virtual hasta que pueda volver al aula.

Para ello, les preparé unas actividades para que ir resolviendo en sus casas. Pero ¡NO SE ASUSTEN! No son difíciles, los ejercicios que a continuación van a encontrar están acompañados por una explicación teórica para que puedan resolverlos, además iremos realizando clases a través de meet.

Y en caso que necesiten ayuda, me pueden mandar un mensaje por el grupo de WhatsApp Matemática 4°1° y trataré de ayudarlo en todo lo que sea posible.

Así que ¡A TRABAJAR! y espero que todo esto termine pronto y poder conocerlos los más ante posible pero para que todo eso suceda no nos olvidemos de seguir todas las recomendaciones para ganarle a esta pandemia.

Saludos

Prof . Vanina

Distribución y cronograma de las tareas:

Teniendo en cuenta que nuestros horarios de clases son:

Martes	15 a 16:20 y 16:30 a 17:10
--------	----------------------------

Martes	13-04-2021	Trabajo Práctico N° 1: Actividades de Diagnóstico. Números enteros y racionales
Martes	20-04-2021	

Martes	27-04-2021	Trabajo Práctico N° 2: Actividades de Diagnóstico. Expresiones algebraicas
Martes	04-05-2021	

Martes	11-05-2021	Trabajo Práctico N° 3: Actividades de Diagnóstico. Operaciones con polinomios
Martes	18-05-2021	

Martes	25-05-2021	Feriado “ Día de la revolución de Mayo”
--------	------------	--

Martes	01-06-2021	Trabajo Práctico N° 4: Actividades de diagnóstico. Función
Martes	08-06-2021	

Martes	15-06-2021	Trabajo Práctico N° 5: Derivada: Definición e interpretación geométrica de la derivada
Martes	22-06-2021	

Martes	29-06-2021	Trabajo Práctico N° 6: Derivada. Derivadas inmediatas
Martes	06-07-2021	

Martes	27-07-2021	Trabajo Práctico N° 7: Derivada: Reglas de derivación – Parte 1
Martes	03-08-2021	

Martes	10-08-2021	Trabajo Práctico N° 8: Derivada: Reglas de derivación – Parte2
Martes	17-08-2021	

Martes	24-08-2021	Trabajo Práctico N° 9: Derivada: Reglas de la cadena – Parte1
Martes	31-08-2021	

Martes	07-08-2021	Trabajo Práctico N° 10: Derivada: Reglas de la cadena – Parte 2
Martes	14-09-2021	

Martes	21-09-2021	Trabajo Práctico N° 11: Análisis de funciones
Martes	28-09-2021	

Martes	05-10-2021	Trabajo Práctico N° 12: Integrales: Definición
Martes	12-10-2021	

Martes	19-10-2021	Trabajo Práctico N° 13: Integrales: integrales inmediata
Martes	26-10-2021	

Martes	02-11-2021	Feriado “ Día de los muertos”
--------	------------	--------------------------------------

Martes	09-11-2021	Trabajo Práctico N° 14: Integrales: Propiedades
Martes	16-11-2021	

Trabajo Práctico N° 1:

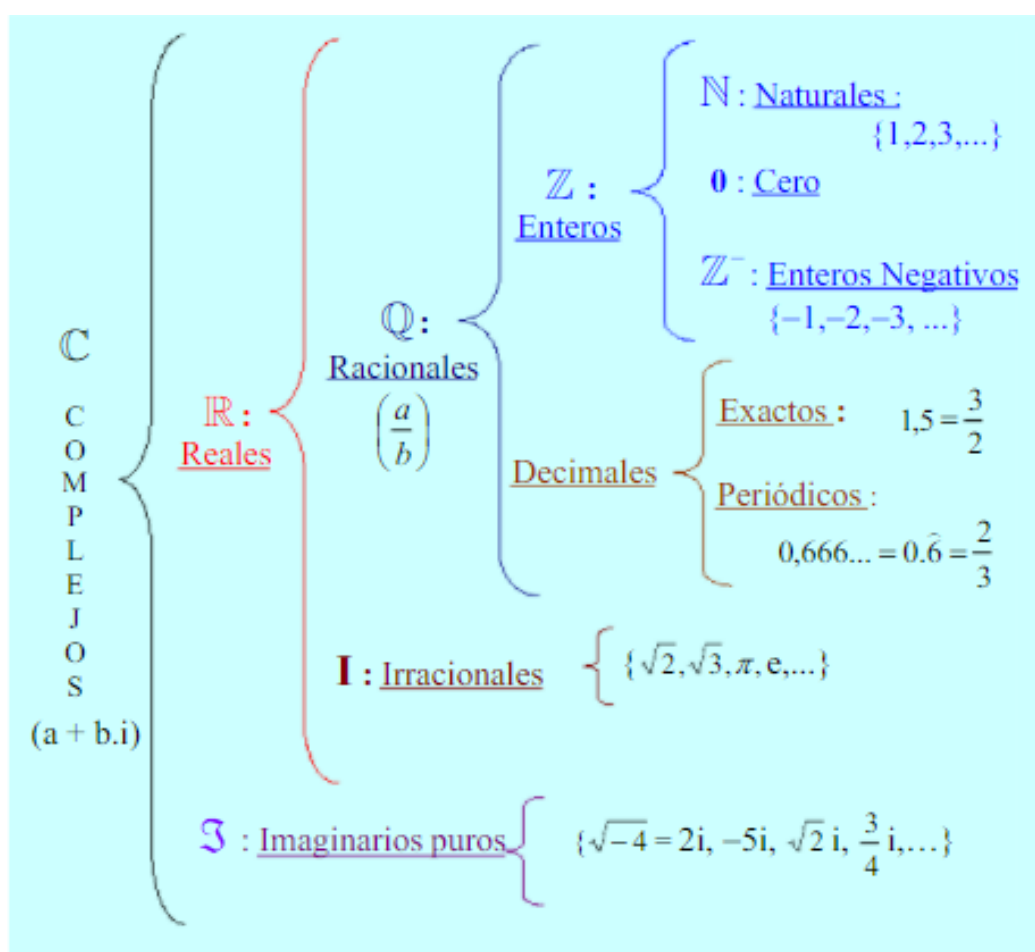
Actividades de Diagnóstico – Números enteros y racionales

TEORÍA

¿Cuáles son los conjuntos numéricos que existen?

El orden de construcción de los conjuntos numéricos (de menor a mayor complejidad) es el siguiente:

- **Números naturales:** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ son los que se utilizan para contar elementos
- **Números enteros:** $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$ reúne a los positivos, sus opuestos negativos y el cero
- **Números racionales:** $\mathbb{Q}$ son los números que pueden expresarse como fracciones o cocientes entre enteros
- **Números irracionales:** $\mathbb{I}$ son los que no pueden ser expresados como una fracción m/n , donde m y n sean enteros y n sea diferente de cero
- **Números reales:** $\mathbb{R}$ incluye a todos los conjuntos anteriores
- **Números complejos:** $\mathbb{C}$ son los que pueden representarse como la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra i)



NÚMEROS ENTEROS

Reglas de Operación

SUMA ALGEBRAICA

DE IGUAL SIGNO: se suma y se coloca el mismo signo

DE DISTINTO SIGNO: se resta y se coloca el signo del de mayor valor absoluto

SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS

+ () Más delante del paréntesis, no le cambia el signo a los números dentro del paréntesis

-() Menos delante del paréntesis, le cambia el signo a los números dentro del paréntesis

MULTIPLICACIÓN O DIVISIÓN

Se multiplican o dividen los números y se aplica regla de los signos

$$+ \cdot + = + \quad + \cdot - = - \quad - \cdot + = - \quad - \cdot - = +$$

POTENCIA: Se multiplica la base tantas veces como indica el exponente

Exponente par -----> resultado positivo

Exponente impar -----> el resultado lleva el signo de la base

RADICACIÓN

Se busca un número que multiplicado tantas veces como indica el índice dé como resultado el radicando

Índice par – radicando positivo -----> tiene dos resultados, uno positivo y uno negativo

Índice par – radicando negativo -----> no tiene solución en el conjunto de los enteros

Índice impar -----> el resultado lleva el signo del radicando

PROPIEDADES DE LA POTENCIA

- 1- Producto de potencias de igual base: se coloca la misma base y se suman los exponentes

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\text{Ej. } 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$

- 2- División de potencias de igual base: se coloca la misma base y se restan los exponentes

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$\text{Ej. } 2^4 : 2^2 = 2^{4-2} = 2^2 = 4$$

- 3- Potencia de otra potencia: se coloca la misma base y se multiplican los exponentes

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\text{Ej. } (2^2)^3 = 2^2 \cdot 3 = 2^6 = 64$$

4- La potencia es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\text{Ej. } (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

$$\text{Ej. } (4 : 2)^3 = 4^3 : 2^3 = 64 : 8 = 8$$

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

1- La radicación distributiva con respecto a la multiplicación y a la división

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\text{Ej. } \sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$$

$$\text{Ej. } \sqrt[3]{729 : 27} = \sqrt[3]{729} : \sqrt[3]{27} = 9 : 3 = 3$$

2- Raíz de otra raíz: se coloca el mismo radicando y se multiplican los índices

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\text{Ej. } \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$$

3- Simplificación de índices y exponentes

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot b]{a^{m \cdot b}}$$

$$\text{Ej. } \sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4 \cdot 2]{16^{4 \cdot 2}} = \sqrt[2]{16^1} = \sqrt{16} = 4$$

NÚMEROS RACIONALES

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

- IGUAL DENOMINADOR: para sumar o restar fracciones con igual denominador, se suman o restan los numeradores y se escribe el mismo denominador.
- DISTINTO DENOMINADOR: para reducir las fracciones a común denominador, vamos a emplear el método del mínimo común múltiplo. Lo primero que se hace es hallar el m.C.M. de los denominadores. Para ir calculando los numeradores, se divide el mCM por el denominador al cociente obtenido se lo multiplica por el numerador. El último paso es sumar o restar los numeradores obtenidos.

$$\text{Ej. } \frac{1}{6} - \frac{5}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2 - 5 + 9}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Para multiplicar dos o más fracciones, primero se debe simplificar todo lo posible y luego se multiplica. **La simplificación es entre numerador y denominador, la multiplicación es entre numeradores y denominadores entre sí.**

$$\text{Ej. } \frac{3}{4} * \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{3 * 5}{4 * 7} = -\frac{15}{28}$$
$$-\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{2}{\cancel{14}}} * \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{5 * 3}{2 * 1} = -\frac{15}{2}$$

DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir dos fracciones hay que multiplicar al dividendo por la fracción inversa del divisor y luego resolver la multiplicación obtenida.

$$\text{Ej. } -\frac{7}{2} : \left(-\frac{8}{5}\right) = -\frac{7}{2} * \left(-\frac{5}{8}\right) = -\frac{35}{16}$$

POTENCIACIÓN DE FRACCIONES

Para la potenciación de un número racional, se deben seguir estas reglas:

- FRACCIÓN ELEVADA A UN EXPONENTE NATURAL: se eleva el numerador y el denominador a dicho exponente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{Ej. } \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

- FRACCIÓN ELEVADA A UN EXPONENTE NEGATIVO: se invierte la base para pasar el exponente a positivo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \quad \text{Ej. } \left(-\frac{5}{3}\right)^{-2} = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

- FRACCIÓN ELEVADA A UN EXPONENTE FRACCIONARIO: se define como

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \quad \text{Ej. } \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{9}{25}\right)^1} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

RADICACIÓN DE FRACCIONES

Para resolver la raíz de índice n de una fracción se halla la raíz de índice n del numerador y del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{Ej. } \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

Recuerden:

- ✓ *Las raíces de índice par tienen dos resultados opuestos*
- ✓ *Las raíces de índice par y base negativa no tienen solución real*

ACTIVIDADES

REPASO NÚMEROS ENTEROS Y NÚMEROS RACIONALES

1. Copiar la teoría en la carpeta
2. Resolver los siguientes ejercicios
NÚMEROS ENTEROS

$$2 - 5 =$$

$$8 + 2 =$$

$$-30 + 50 =$$

$$-3 - 8 =$$

$$-30 - 20 =$$

$$10 - 10 =$$

$$-1 + 9 + 4 + 13 - 17 - 20 + 2 =$$

$$15 - 23 + 11 - 34 + 19 - 34 - 27$$

$$+(-8 + 5) - (+11) =$$

$$-(+7 - 10) + (-5) =$$

$$5 \times 6 =$$

$$-8 \times 4 =$$

$$-6 \times (-7) =$$

$$-63 : 9 =$$

$$45 : (-9) =$$

$$-54 : (-6) =$$

$$(-2)^3 =$$

$$(-1)^4 =$$

$$-5^2 =$$

$$(-4)^2 =$$

$$-3^5 =$$

$$-1^6 =$$

$$(-7)^0 =$$

$$(-5)^3 =$$

$$\sqrt{81} =$$

$$\sqrt[3]{-27} =$$

$$\sqrt[3]{-216} =$$

$$\sqrt{196} =$$

$$\sqrt[3]{125} =$$

$$\sqrt[5]{-243} =$$

$$a^3 \times a^2 \times a =$$

$$(b^5 \times b^5) : b^7 =$$

$$(m^4 \times m)^2 =$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} =$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} =$$

$$\sqrt[3]{5^3} =$$

NÚMEROS RACIONALES

$$\frac{2}{5} - 1 =$$

$$\frac{5}{9} - \frac{2}{3} =$$

$$\frac{7}{5} + \frac{1}{5} =$$

$$-\frac{2}{5} + \frac{1}{15} =$$

$$\frac{144}{35} \times \left(-\frac{63}{72}\right) =$$

$$\frac{14}{15} \times \frac{45}{100} \times \frac{7}{28} =$$

$$-\frac{36}{77} : \left(-\frac{24}{55}\right) =$$

$$\frac{2}{5} : \left(-\frac{46}{55}\right) : \frac{33}{69} =$$

$$-\frac{15}{8} \times \frac{3}{70} : \frac{5}{32} =$$

$$\frac{32}{28} \times \frac{40}{14} : \frac{16}{49} =$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 =$$

$$\left(-\frac{9}{5}\right)^{-1} =$$

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{-2} =$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 =$$

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} =$$

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{1024}} =$$

Trabajo Práctico N° 2:

**Actividades de
diagnóstico.
Expresiones
algebraicas**

Teoría

Expresiones algebraicas

Una EXPRESIÓN ALGEBRAICA es una combinación de letras, números y signos de operaciones. Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan variables o incógnitas.

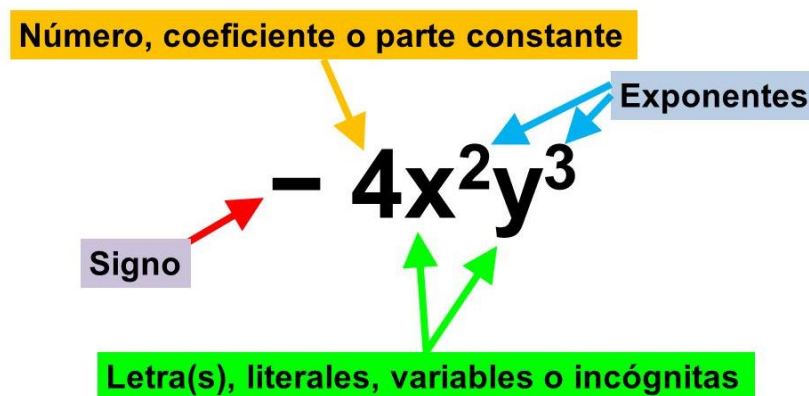
Las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje matemáticos expresiones del lenguaje habitual

Ejemplo: $3x + 4y$

Esta expresión significa: “3 veces un número y” o bien “tres por x más cuatro por y”

Veamos algunos conceptos básicos:

Término: es una expresión algebraica con números y variables, conectadas sólo por las operaciones de multiplicación. Cuenta de cuatro partes:



Tipos de expresiones algebraicas según el número de término

- **MONOMIO:** es una expresión algebraica de un solo término

$$P(x) = 2x^5$$

- **BINOMIO:** es una expresión algebraica formado por dos términos

$$P(x) = 2x^5 + 3x^2$$

- **TRINOMIO:** es una expresión algebraica formado por tres términos

$$P(x) = 2x^5 + 4x^3 - 3x$$

- **CUATRINOMIO:** es una expresión algebraica formado por cuatro términos

$$P(x) = 2x^5 + 4x^3 - \frac{1}{7}x^2 + 3x$$

- **POLINOMIO:** En general, cualquier expresión algebraica con más de un término es un polinomio. Por lo tanto, binomios, trinomios y cuatrinomios son polinomios.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Polinomio de varias variables

Un polinomio puede tener varias variables. El polinomio estará formado por distintos términos que cuentan con un coeficiente y varias variables cada una con un respectivo exponente. Por ejemplo:

Una variable	→	$P(x) = x^4 - x + 3$
Dos variables	→	$P(x, y) = 2x^2y - 3x^5 + 3$
Tres variables	→	$P(x, y, z) = xz - 3x^5y^2z^2 + 3z$

Grado de un polinomio

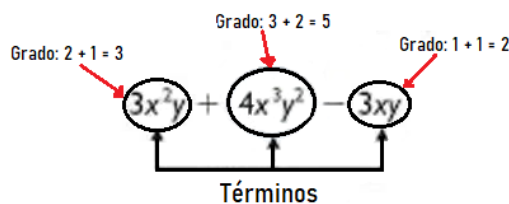
El grado de un polinomio $P(x)$ es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable x

Según su grado los polinomios pueden ser de:

TIPO	EJEMPLO
Grado cero	$P(x) = -2$
Primer grado	$P(x) = 3x + 2$
Segundo grado	$P(x) = 2x^2 + 3x + 2$
Tercer grado	$P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$
Cuarto grado	$P(x) = 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2$
Quinto grado	$P(x) = 2x^5 - 5x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

Para obtener el grado de un polinomio que tiene múltiples variables se debe calcular el grado de cada uno de los términos que lo conforman, es decir, sumar los exponentes de cada una de las variables. Luego, se comparan las sumas, el valor más alto equivale al grado del polinomio

Ejemplo: $P(x, y) = 3x^2y + 4x^3y^2 - 3xy$



Grado del polinomio: **5**

Clases de polinomio

- **Polinomio nulo:**

Es aquel polinomio que tiene todos sus coeficientes nulos.

$$P(x) = 0x^2 + 0x + 0$$

- **Polinomio completo:**

Es aquel polinomio que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$$

- **Polinomio incompleto**

Es aquel polinomio que no tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

$$P(x) = 2x^3 - 3 + 5x$$

- **Polinomio ordenado:**

Un polinomio está ordenado si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado.

$$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$$

Actividades:

- 1) Copiar la teoría a la carpeta
- 2) Completar la siguiente tabla

(La primera columna de la tabla está completa a modo de ejemplo)

Monomio	$8x^4$	$-7x^5$	$4x^3y^2z$	5	$-6x$
Coeficiente	8				
Grado	4				

- 3) Escribir polinomios que cumplan con las siguientes características
 - a. Binomio de grado 2
 - b. Monomio de grado 6
 - c. Trinomio desordenado de grado 5
 - d. Cuatrinomio ordenado de grado 3
 - e. Binomio desordenado de grado 4
 - f. Trinomio ordenado de grado 4
- 4) Completar la siguiente tabla

(La primera fila de la tabla está completa a modo de ejemplo)

POLINOMIOS	CANT. DE TÉRMINOS	GRADO	COEFICIENTES	TÉRMINO INDEPENDIENTE
$P(x) = 7x^3 - 9x^2 - 2x + 5$	4	3	7, -9, -2 y 5	5
$P(x) = 5x^2 + 7x^5$				
$P(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 3x + 0,3$				
$P(x, y) = 8x^3y^4$				
$P(x) = 7x^5 - 3x^3 + x + 10x^4 + 9$				
$P(x, y, z) = x^2y^3z + xyz + y^3z$				

Trabajo Práctico N° 3:

**Actividades de
diagnóstico –
Operaciones con
polinomios y casos de
factoreo**

Teoría

Operaciones con polinomios

- SUMA**

Los términos que tienen la misma parte literal (es decir, la misma variable y exponente) son **semejantes**.

Para sumar polinomios se reducen los términos semejantes según las reglas de operación de los números reales.

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x + 5) + (2x^2 - 7x - 4) &= \\ (x^2 - 3x + 5) + (2x^2 - 7x - 4) &= 3x^2 - 10x + 1\end{aligned}$$

- RESTA**

Para restar dos polinomios se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x + 5) - (2x^2 - 7x - 4) &= \\ (x^2 - 3x + 5) + (-2x^2 + 7x + 4) &= -x^2 + 4x + 9\end{aligned}$$

- PRODUCTO**

Para multiplicar dos polinomios multiplicamos cada monomio del primer polinomio por cada monomio del segundo, aplicando reglas de signos de producto y a su vez propiedades de potenciación. Luego reducimos aquellos monomios con la misma parte literal o semejante. (Propiedad Distributiva).

$$(2x + 3) \cdot (7x - 5) = 14x^2 - 10x + 21x - 15 = 14x^2 + 11x - 15$$

- POTENCIACIÓN**

Se puede resolver de dos maneras:

1- Multiplicar la base tantas veces como indica el exponente

$$(a + b)^2 = (a + b) \times (a + b) = a^2 + a \cdot b + b \cdot a + b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Factoreo de polinomios

Factorear un polinomio es expresarlo como un producto de polinomios primos. A diferencia de los números, para factorizar un polinomio existen diversas formas posibles para encontrar los polinomios primos de acuerdo a las características del polinomio original y se denominan CASOS DE FACTOREO.

- 1- **FACTOR COMÚN**: una expresión es factor común en una suma algebraica cuando figura en cada término como factor, por ejemplo **$ab+ac$** , el factor común **a** .

Por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:
 $ab + ac = a(b + c)$

Ej. $x^5 - 2x^4 - 6x = x(x^4 - 2x^3 - 6)$

- 2- **FACTOR COMÚN EN GRUPO**: algunas expresiones presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos

Ej. $x^5 - 2x^4 - 3x + 6 = x^4(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x^4 - 3)$

- 3- **TRINOMIO CUADRADO PERFECTO**: es igual al cuadrado de un binomio si cumple:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Ej. $x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + (3)^2 = (x + 3)^2$

- 4- **TRINOMIO CUADRADO NO PERFECTO**: Si un trinomio de grado 2 no resulta cuadrado perfecto, la fórmula para obtener raíces resulta apropiada

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ej. $x^2 + 3x + 2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = -2 \Rightarrow (x + 1)(x + 2)$

- 5- **CUATRINOMIO CUBO PERFECTO**: es igual al cubo de un binomio si cumple:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

Ej. $8 + 12x + 6x^2 + x^3 = (2)^3 + 3 \cdot (2)^2x + 3 \cdot 2 \cdot (x)^2 + (x)^3 = (2 + x)^3$

- 6- **DIFERENCIA DE CUADRADOS**: se identifica por tener dos términos elevados al cuadrado y unidos por el signo menos. Se resuelve:

Actividades:

- 1) Copiar la teoría a la carpeta
- 2) Resolver las siguientes operaciones con polinomios

- a. $\left(3x - 4 + \frac{1}{2}x^3 - 2x^2\right) + \left(-2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right) =$
- b. $(40m - m^2 + 5m^3 - 3) - (m^2 - 5m + 2) =$
- c. $-2a \cdot (-3a^2 + 5a - 3) =$
- d. $\left(-\frac{2}{3}x + 3\right)^2 =$

3) Factorizar los siguientes polinomios

- a. $\frac{14}{5}x^2 + \frac{7}{10} + \frac{21}{5}x^3 =$
- b. $x^2 + 6x + 9 =$
- c. $100 - 4x^2 =$
- d. $3b^3 + 3b^2 + 2b + 2 =$
- e. $m^3 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} =$

Trabajo Práctico N° 4:

Actividades de diagnóstico. Función

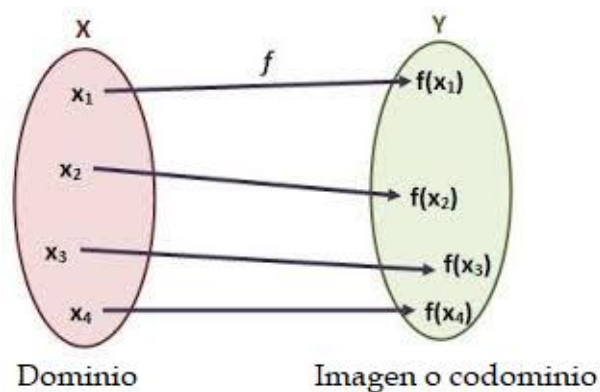
Teoría

Definición de función

El concepto de función matemática o simplemente función, es sin duda, el más importante y utilizado en Matemáticas y en las demás ramas de la Ciencia. No fue fácil llegar a él y muchas mentes muy brillantes han dedicado enormes esfuerzos durante siglos para que tuviera una definición consistente y precisa

En matemáticas, **una función es la relación entre dos variables** y nos referimos a ellas como $f(x)$ y deben cumplir dos condiciones:

- A cada elemento de la imagen le corresponde una única imagen
- En el dominio de la función no puede haber elemento que no posean imágenes.



Variable independiente y dependiente

La idea que subyace en el núcleo central del concepto de función, es la de relación de dependencia entre magnitudes o variables. Al estudiar un fenómeno cualquiera, se suele observar que las magnitudes o cantidades que intervienen presentan una relación entre ellas, de forma que una de las magnitudes depende de la otra. La expresión analítica de esa relación de dependencia es la función:

$$y = f(x)$$

El diagrama muestra la ecuación $y = f(x)$ con dos flechas verticales debajo de ella. Una flecha verde apunta hacia el y y está etiquetada 'Variable dependiente'. Una flecha roja apunta hacia el x y está etiquetada 'Variable independiente'.

Formas de expresar una función

Fundamentalmente, existen 3 formas de expresar una función:

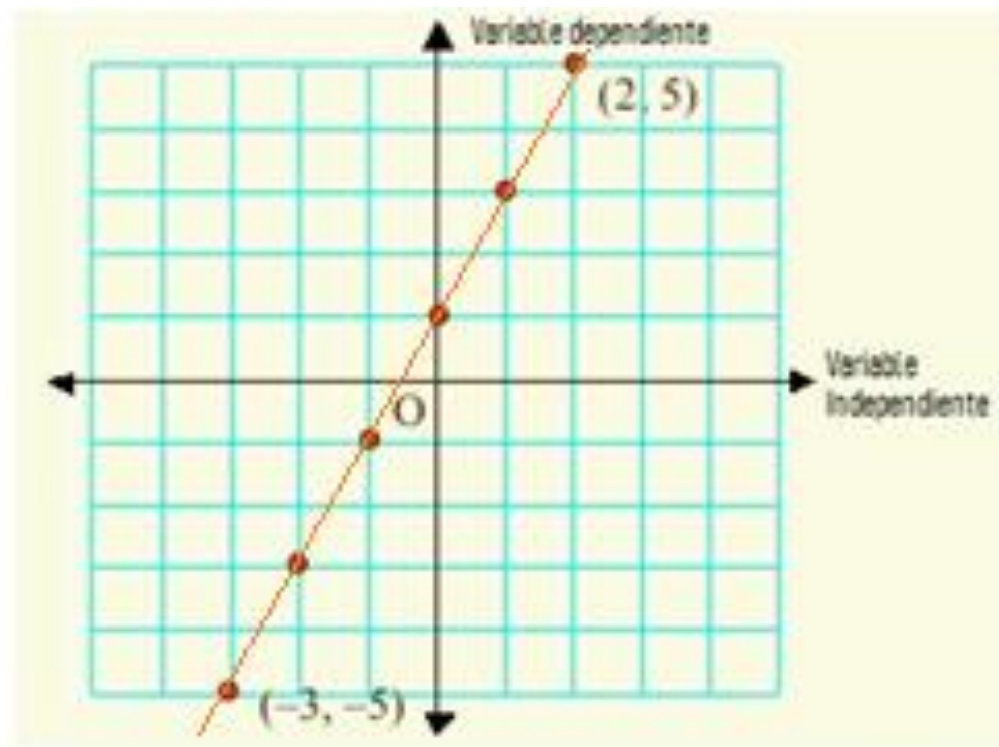
- por una fórmula (también llamada ecuación),

$$f(x) = 2x + 1.$$

- por medio de una tabla de valores o

x	$y = f(x)$
-3	-5
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

- una gráfica



Cada una de ellas tiene sus ventajas e inconvenientes, pero podemos avanzar que la fórmula es la mejor forma de expresar la función, ya que con ella podemos obtener las otras dos expresiones mediante una serie de procedimientos establecidos.

CLASIFICACIÓN de las FUNCIONES ELEMENTALES

FUNCIONES ELEMENTALES

Algebraicas

Se obtienen por combinaciones de la variable (x) mediante las operaciones elementales de:

- SUMA/RESTA
- PRODUCTO/DIVISIÓN
- POTENCIACIÓN /RADICACIÓN

Polinómicas

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + d$$

Constante: $y = a$

Lineal: $y = ax$

Transforma sumas en sumas
 $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Afin: $y = ax + b$

Es una traslación de la lineal

Cuadráticas: $y = ax^2 + bx + c$

Potenciales:

Pares	$\begin{cases} y = x^4 \\ y = x^6 \end{cases}$
Impares	$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x^5 \end{cases}$

Racionales:

Propor. Inversa: $y = \frac{k}{x}$
 $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Irracionales (con radicales): $y = \frac{\sqrt[n]{P(x)} + Q(x)}{R(x) - \sqrt[n]{S(x)}}$

Definidas a Trozos

Algunas con nombre propio

Valor absoluto: $y = |x| = \sqrt{x^2}$

Escalonadas: $y = E[x]$

Mantisa: $y = x - E[x]$

Función signo: $y = \text{sig}(x)$

Trascendentes

Se 'obtienen' a partir de las funciones algebraicas mediante el proceso de la integración definida.
Por ejemplo:

$$\ln x = \int \frac{1}{t} dt$$

Exponencial: $y = a^x$ ($0 < a$)

Transforma sumas en productos
 $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

Logarítmica: $y = \log_a x$ ($0 < a$)

Transforma productos en sumas
 $f(xy) = f(x) + f(y)$

Trigonómicas

$y = \text{sen } x$
 $\text{sen}(x+y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{sen } y$

$y = \text{cos } x$
 $\text{cos}(x+y) = \text{cos } x \cos y - \text{sen } x \text{sen } y$

$y = \text{tg } x$

$y = \text{sen}^{-1} x$
$y = \text{cos}^{-1} x$
$y = \text{tg}^{-1} x$

Inversas de las Trigonómicas

.....

Graficar funciones usando tabla de valores

Cuando la variable independiente y la variable dependiente son números reales, una función puede representarse en una gráfica de coordenadas. La

variable independiente se grafica en el eje x y la variable dependiente se grafica en el eje y.

Funciones lineales

Un primer paso para graficar una función es hacer una tabla de valores. Esta es particularmente útil cuando no conoces la forma general de la función.

Probablemente ya sabes que una función lineal será una línea recta, pero hagamos la tabla primero para ver cómo puede ayudarnos.

Cuando hacemos la tabla, es buena idea incluir valores negativos, valores positivos y cero para asegurarnos de que realmente tienes una función lineal.

Ejemplo														
Problema	Hacer una tabla de valores para $f(x) = 3x + 2$.													
	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	x	f(x)			Traza una tabla de dos columnas. Marca las columnas con x y f(x).								
x	f(x)													
	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>-2</td><td></td></tr><tr><td>-1</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	x	f(x)	-2		-1		0		1		3		Escoge varios valores de x y anótalos en filas separadas en la columna x. Consejo: Siempre es buena idea incluir el 0, valores positivos y valores negativos, si es posible.
x	f(x)													
-2														
-1														
0														
1														
3														
	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>-2</td><td>-4</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>11</td></tr></table>	x	f(x)	-2	-4	-1	-1	0	2	1	5	3	11	Evalúa la función para cada valor de x y escribe el resultado en la columna f(x) junto al valor de x correspondiente. Cuando $x = 0$, $f(0) = 3(0) + 2 = 2$, $x = 1$, $f(1) = 3(1) + 2 = 5$ $x = -1$, $f(-1) = 3(-1) + 2 = -3 + 2 = -1$, etc.
x	f(x)													
-2	-4													
-1	-1													
0	2													
1	5													
3	11													
Possible Respuesta	<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>-2</td><td>-4</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>11</td></tr></table>	x	f(x)	-2	-4	-1	-1	0	2	1	5	3	11	(Observa que tu tabla de valores podría ser distinta a la de alguien más, pudiste haber escogido otros números para x.)
x	f(x)													
-2	-4													
-1	-1													
0	2													
1	5													
3	11													

Ahora que tienes la tabla de valores, puedes usarlos para ayudarte a dibujar la forma y la posición de la función. Importante: La gráfica de la función mostrará todos los valores posibles de x y sus valores correspondientes de y. Es por eso que es la gráfica de una recta y no sólo los puntos que están en la tabla.

Ejemplo

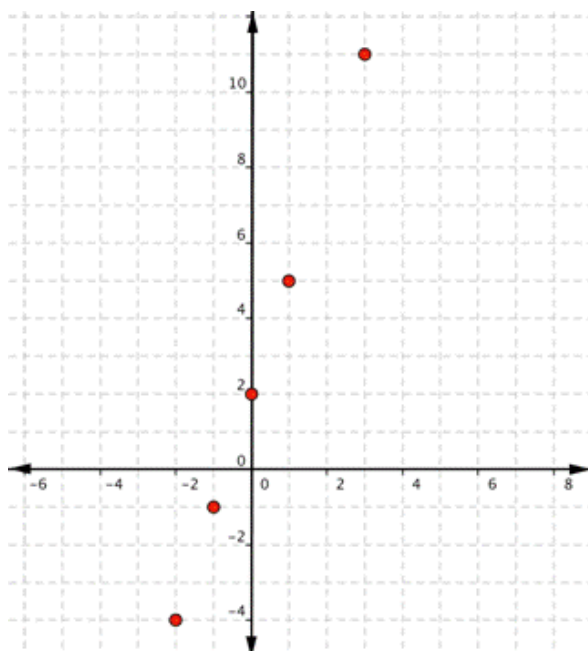
Problema

Graficar $f(x) = 3x + 2$.

x	f(x)
-2	-4
-1	-1
0	2
1	5
3	11

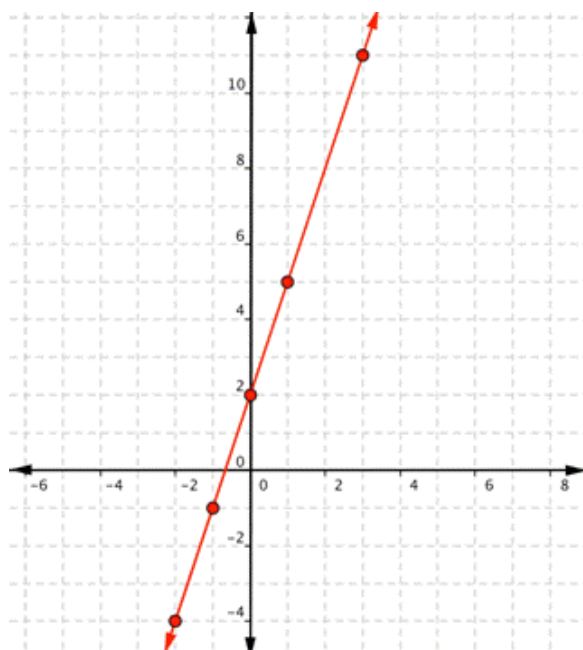
Empieza con la tabla de valores, como la del ejemplo anterior.

Si piensas en $f(x)$ como y , cada fila forma un par ordenado que puedes graficar en el plano de coordenadas.



Grafica los puntos.

Respuesta



Como los puntos están sobre una recta, traza la recta que pasa por los puntos.

Funciones cuadráticas

Las funciones no lineales también pueden graficarse. Es útil tener una idea de qué forma tendrá, por lo que debes asegurarte de escoger suficientes puntos para guiarte. Empecemos con la función cuadrática más básica, $f(x) = x^2$

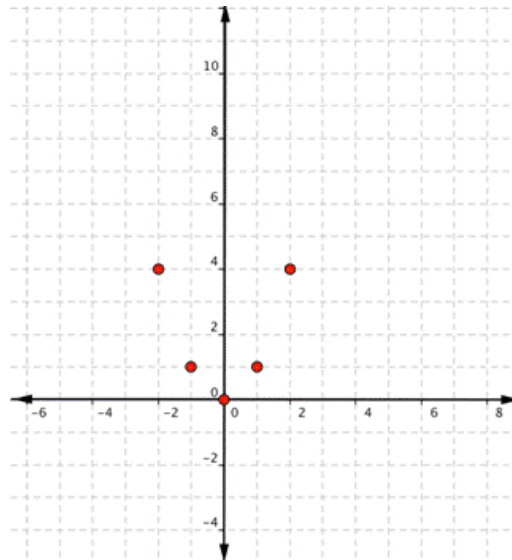
Ejemplo

Problema

a. Graficar $f(x) = x^2$

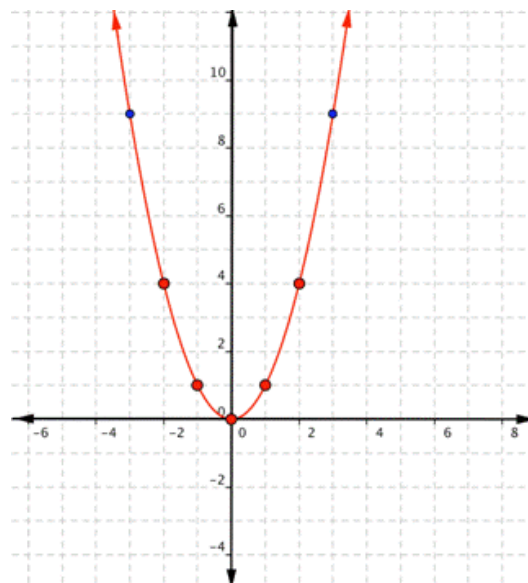
x	f(x)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Empieza con una tabla de valores. Luego piensa en la tabla como pares ordenados.



Grafica los puntos.

Respuesta



Como los puntos no están en una recta, no puedes usar una regla. Conecta los puntos como mejor puedas, usando una curva suave (no una serie de rectas). Puedes encontrar más puntos para ayudarte (como los que están en azul).

Actividades:

- 2) Copiar la teoría a la carpeta
- 3) Armar la tabla de valores y graficar las siguientes funciones:
 - a. $f(x) = 2x + 1$
 - b. $f(x) = -x^2 + 2x$

Trabajo Práctico N° 5:

Derivada: Definición e Interpretación gráfica de la derivada

Teoría

A partir de este práctico vamos a empezar a trabajar con temas referidos a la rama de la matemática **CÁLCULO** relacionada con el cálculo y la aplicación de entidades conocidas como derivada e integrales.

La rama de la matemática Cálculo dividiremos en dos áreas amplias pero relacionadas:

- Cálculo diferencial
- Cálculo integral

En este práctico empezaremos a trabajar con el **Cálculo diferencial**

Para entender los resultados del Cálculo diferencial es necesario, antes que nada, comprender la idea básica del mismo: el concepto de derivada.

Derivada de una función en un punto

En cálculo, la derivada representa cómo una función cambia (valor de la variable dependiente) a medida que su abscisa (valor de la variable independiente) cambia. En términos poco rigurosos, una derivada puede ser vista como cuánto está cambiando el valor de una función en un punto dado (o sea su velocidad de variación); por ejemplo, la derivada de la posición de un vehículo con respecto al tiempo, es la velocidad instantánea con la cual el vehículo está viajando.

La derivada de una función es un valor de abscisa dado que describe la mejor aproximación lineal de una función cerca del valor de abscisa. Para funciones de valores reales de una sola variable, la derivada en un punto representa el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

La derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ es el valor del límite, si existe, del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

Para determinar la derivada de una función en un punto se puede desarrollar la definición:

Ej: Derivar la función $f(x) = 4x + 3$

1. Primero, copiamos la fórmula de definición de la derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}$$

2. Luego reemplazamos la función $f(x) = 4x + 3$ en la fórmula del punto 1

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4(x + \Delta x) + 3 - (4x + 3)}{\Delta x}$$

3. Resolvemos para poder suprimir paréntesis

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x + 4 \Delta x + 3 - 4x - 3}{\Delta x}$$

4. Agrupamos términos semejantes

$$\Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 \Delta x}{\Delta x}$$

5. Simplificamos

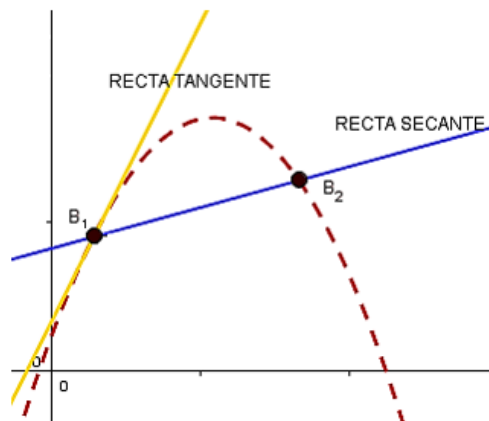
$$\Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4 \Rightarrow y' = 4$$

6. Calculamos el límite y obtenemos el valor de la derivada

$$\Rightarrow y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 4 \Rightarrow y' = 4$$

Antes de empezar con la interpretación geométrica, vamos a recordar dos conceptos que necesitaremos:

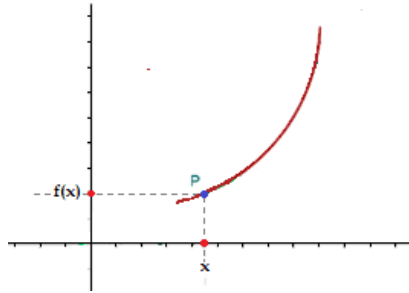
- RECTA SECANTE A LA CURVA: es la recta que corta a la curva en dos puntos
- RECTA TANGENTE A LA CURVA: es la recta que corta a la curva en un único punto



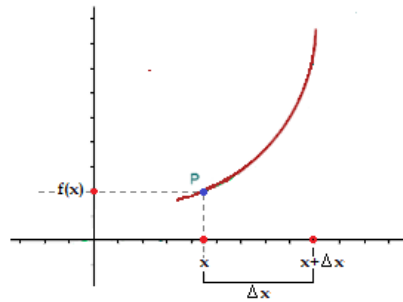
Interpretación geométrica de la derivada

Dada una función $f(x)$ derivable y continua

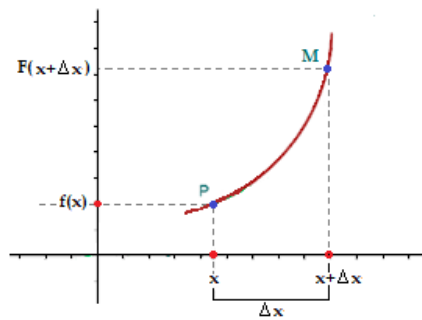
1) Tomamos un punto x perteneciente a la función



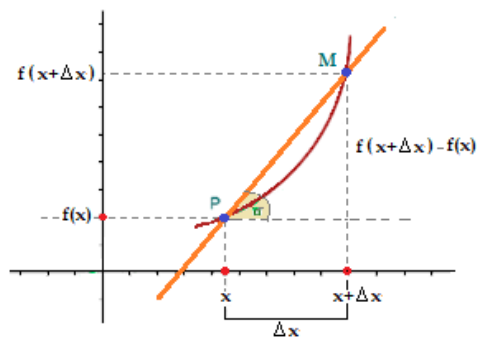
2) Marcamos un incremento Δx



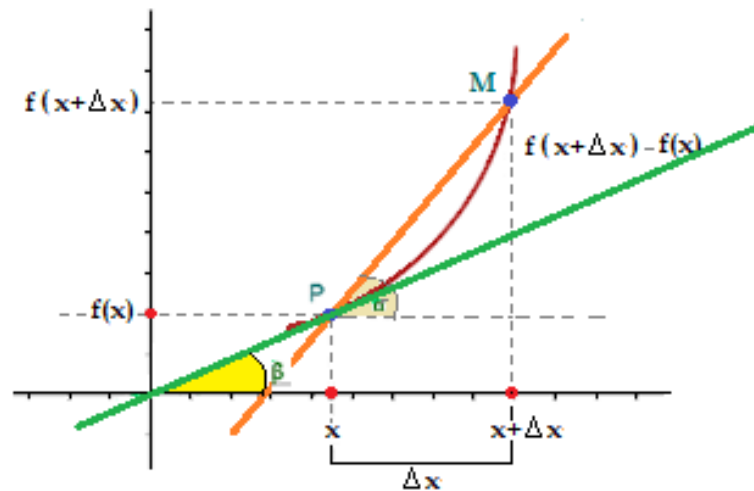
3) Determinamos el punto $x + \Delta x$ (M)



4) Uniendo los puntos M y P obtenemos una recta secante a la curva



5) Achicamos el incremento Δx hasta que sea casi imperceptible y llega un punto que $x + \Delta x$ es tan chico que la recta secante que une $f(x)$ y $f(x + \Delta x)$ se hace tangente a la curva



Para saber cuánto vale numéricamente la pendiente de la recta tangente en el punto hacemos la razón entre el incremento vertical y el incremento horizontal, es decir el cociente de incrementos.

$$\frac{\Delta \text{Vertical}}{\Delta \text{Horizontal}} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \rightarrow \text{COCIENTE INCREMENTAL}$$

Achicar el incremento Δx se puede expresar como $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$

Y como queremos calcular la pendiente de la curva, calculamos al límite para Δx tendiendo a 0 del cociente incremental

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \tan \beta$$

Actividades:

- 1) Copiar la teoría a la carpeta
- 2) Derivar la función utilizando la definición de derivada $f(x) = 7x - 2$

Trabajo Práctico N° 6:

Derivadas: Derivadas inmediatas

Teoría

Derivadas inmediatas

Para determinar la derivada de una función en un punto se puede desarrollar la definición, tal como vimos anteriormente o, simplificando el proceso, usar una Tabla de derivadas inmediatas.

La derivación de funciones simples es inmediata porque solo se necesita aplicar la tabla de derivadas y realizar operaciones algebraicas simples.

Tabla de derivadas

$y = cte \text{ (nro)}$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x^n}$	$y' = \frac{-n}{x^{n+1}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \sec^2 x$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\operatorname{cosec}^2 x$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$
$y = \operatorname{cosec} x$	$y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$

$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = e^u$	$y' = u' \cdot e^u$
$y = a^u$	$y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$
$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u' \cdot \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u' \cdot \sec^2 u$
$y = \operatorname{cotg} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u$
$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \sec u \cdot \operatorname{tg} u$
$y = \operatorname{cosec} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u$

Pasos para calcular una derivada usando la tabla de derivadas inmediatas

Dada la función $y = x^5$

1. Miramos en la tabla de derivadas y buscamos en el sector gris, una función que se parezca a la de nuestro ejercicio

$y = cte \text{ (nro)}$	$y' = 0$	$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Teniendo en cuenta nuestro ejercicio nuestra n vale 5, o sea $n=5$

2. Ahora miramos la fórmula que se encuentra a la derecha de la función que identificamos en el paso anterior

$y = cte \text{ (nro)}$	$y' = 0$	$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

3. Copiamos la fórmula y la remplazamos por los datos de nuestro ejercicio

$$y = x^5$$

$$n=5$$

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$y' = 5 \cdot x^{5-1}$$

4. Resolviendo las operaciones obtenemos nuestra derivada

$$y' = 5 \cdot x^{5-1}$$

$$y' = 5 \cdot x^4$$

Actividades:

- 1) Copiar la teoría a la carpeta
- 2) Calcular la derivada de las siguientes funciones

a. $y = e^x$

b. $y = 5$

c. $y = \frac{1}{x^6}$

d. $y = \operatorname{sen} x$

e. $y = \ln x$

f. $y = \sqrt{x}$

g. $y = 2^x$

h. $y = \log_5 x$

i. $y = x$

j. $y = x^3$

k. $y = \cos x$

l. $y = 4^x$

m. $y = \operatorname{tg} x$

n. $y = \operatorname{cotg} x$

o. $y = \ln 2$

Trabajo Práctico N° 7:

Derivadas: Reglas de derivación – Parte 1

Teoría

- **DERIVADA DE LA SUMA DE FUNCIONES:** la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de dichas funciones.

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

Ej. $f(x) = \ln x + \sqrt{x} - \text{sen } x$

1. Una vez que se nos presenta el ejercicio, lo primero que debemos que hacer es separar en términos (+ y - fuera de paréntesis separan términos)

$$f(x) = \ln x + \sqrt{x} - \text{sen } x$$

2. Luego debemos hallar la derivada de cada uno de los términos

$$f(x) = \ln x$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = -\text{sen } x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = -\cos x$$

3. Ahora armamos la derivada de la función con todas las que obtuvimos en el punto anterior y ese es nuestro resultado

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \cos x$$

- **DERIVADA DEL PRODUCTO DE UNA FUNCIÓN POR UNA CONSTANTE:** es igual al producto de la constante por la derivada de la función.

$$f(x) = k * g(x) \Rightarrow f'(x) = [k * g(x)]' \Rightarrow f'(x) = k * g'(x)$$

Ej. $f(x) = 4. \text{sen } x$

1. Una vez que se nos presenta el ejercicio, lo primero que debemos que hacer es identificar cual es la constante y cuál es la función

$$f(x) = 4. \text{sen } x \rightarrow \text{función}$$

↓
constante

2. Buscamos en la tabla la derivada de la función

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x$$

3. Armamos la derivada de la función multiplicando la constante por la derivada hallada en el punto anterior

$$f'(x) = 4 \cdot \cos x$$

Actividades:

- 1) Copiar la teoría a la carpeta
- 2) Resolver las siguientes derivadas aplicando la reglas de derivación

a. $y = x^2 + \operatorname{sen} x$

b. $y = -4 \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \ln x$

c. $y = 2x^2 + 2^x$

d. $y = 1 + 3\sqrt{x}$

e. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

f. $y = -7 \cos x - \frac{4}{x^3}$

Trabajo Práctico N° 8:

Derivadas: Reglas de derivación – Parte 2

Teoría

DERIVADA DEL PRODUCTO DE FUNCIONES:

Es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más la primera función sin derivar por la segunda derivada.

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \times h(x) \\ \Rightarrow f'(x) &= [g(x) \times h(x)]' \\ \Rightarrow f'(x) &= g'(x) \times h(x) + g(x) \times h'(x) \end{aligned}$$

Ej. $f(x) = x^2 \times \ln x$

- Una vez que se nos presenta el ejercicio, lo primero que debemos que hacer es buscar en la tabla de derivadas la fórmula para derivar productos de funciones

$y = \text{cte (nro)}$	$y' = 0$	$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

- Identificamos en nuestra función u y v

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\mathbf{u}} \times \underbrace{\ln x}_{\mathbf{v}}$$

- Ahora buscamos la fórmula de la derivada del producto

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

- Si miramos la fórmula del paso anterior, vemos que sabemos el valor de $u = x^2$ y $v = \ln x$ pero nos falta el valor de u' y v' que debemos calcular

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ u' &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \ln x \\ v' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

- Ahora con las derivadas obtenidas en el punto anterior, la remplazamos en la fórmula del punto 3

$$\begin{aligned} y' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ y' &= 2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \end{aligned}$$

DERIVADA DEL COCIENTE DE FUNCIONES:

Es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar menos la primera función sin derivar por la segunda derivada, todo sobre la segunda función elevada al cuadrado. Con la segunda función distinta de cero.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right]' \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{h^2(x)}$$

Ej. $f(x) = \frac{3x}{\text{sen } x}$

- Una vez que se nos presenta el ejercicio, lo primero que debemos que hacer es buscar en la tabla de derivadas la fórmula para derivar cociente de funciones

$y = \text{cte (nro)}$	$y' = 0$	$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

- Identificamos en nuestra función u y v

$$f(x) = \frac{3x}{\text{sen } x} \quad \begin{matrix} \text{red circle} \rightarrow u \\ \text{blue circle} \rightarrow v \end{matrix}$$

- Ahora buscamos la fórmula de la derivada del producto

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

- Si miramos la fórmula del paso anterior, vemos que sabemos el valor de $u = 3x$ y $v = \text{sen } x$ pero nos falta el valor de u' y v' que debemos calcular

$$\begin{aligned} u &= 3x \\ u' &= 3 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \text{sen } x \\ v' &= \cos x \end{aligned}$$

- Ahora con las derivadas obtenidas en el punto anterior, la remplazamos en la fórmula del punto 3

$$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$y' = \frac{3 \cdot \text{sen } x - 3x \cdot \cos x}{(\text{sen } x)^2} \quad \text{también puede escribirse} \quad y' = \frac{3 \cdot \text{sen } x - 3x \cdot \cos x}{\text{sen}^2 x}$$

Actividades:

- 1) Copiar la teoría a la carpeta
- 2) Resolver las siguientes derivadas aplicando la reglas de derivación

a. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

b. $y = \ln x \cdot \operatorname{sen} x$

c. $y = \frac{e^x}{x^2}$

d. $y = \frac{2\sqrt{x}}{3x}$

e. $y = \log_3 x \cdot 2x^4$

f. $y = \cos x \cdot \operatorname{sen} x$

Trabajo Práctico N° 9:

Derivada: Regla de la cadena – Parte 1

Teoría

Composición de funciones. Regla de la cadena

Dada una función $f(u)$ derivable con respecto a u , siendo u derivable con respecto a x , la derivada de la composición de funciones $f[u(x)]$ con respecto a x es igual al producto de la derivada de f con respecto a u por la derivada de u con respecto a x .

Es decir,

$$\text{si } y = f[u(x)] \text{ entonces se cumple que: } y' = f'(u) \cdot u'(x)$$

Este principio se conoce por **regla de la cadena** de la derivación de funciones compuestas.

Para resolver derivadas usando la regla de la cadena, vamos a utilizar las fórmulas de la tabla de derivadas que se encuentran en la columna de la derecha.

Tabla de derivadas

$y = cte(nro)$	$y' = 0$	$y = u \cdot v$	$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \frac{1}{x^n}$	$y' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = u' \cdot e^u$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^u$	$y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u' \cdot \cos u$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \operatorname{sec}^2 x$	$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u' \cdot \operatorname{sec}^2 u$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\operatorname{cosec}^2 x$	$y = \operatorname{cotg} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$	$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \sec u \cdot \operatorname{tg} u$
$y = \operatorname{cosec} x$	$y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x$	$y = \operatorname{cosec} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u$



Ej. $y = \operatorname{sen}(\ln x)$

1. Lo primero que debemos hacer es entender la composición de funciones del ejercicio. En este caso, el ejercicio está compuesto por una función seno y, dentro del paréntesis, una logaritmo neperiano

2. Miramos en la tabla de derivadas y buscamos en el sector gris, una función que se parezca a la de nuestro ejercicio. Siempre buscamos la función principal, en general, es la que está por fuera del paréntesis.

$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$
$y = e^u$	$y' = u' \cdot e^u$
$y = a^u$	$y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$
$y = \text{sen } u$	$y' = u' \cdot \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \text{sen } u$
$y = \text{tg } u$	$y' = u' \cdot \sec^2 u$
$y = \text{cotg } u$	$y' = -u' \cdot \text{cosec}^2 u$
$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \sec u \cdot \text{tg } u$
$y = \text{cosec } u$	$y' = -u' \cdot \text{cosec } u \cdot \text{cotg } u$

3. Copiamos la fórmula e identificamos las partes en nuestro ejercicio

$$y = \text{sen } u \rightarrow y' = u' \cdot \cos u$$

$$y = \text{sen}(\ln x)$$

$\uparrow$
 u

4. Para hallar la derivada de y, el ejercicio solicita hallar la derivada de u.

$$u = \ln x$$

5. Una vez realizado el paso anterior, remplazamos en la fórmula con los datos del ejercicio para obtener el y'

$$u = \ln x$$

$$u' = \frac{1}{x}$$

$$y' = u' \cdot \cos u$$

Finalmente, el resultado final es: $y' = \frac{1}{x} \cdot \cos(\ln x)$

Actividades:

- 5) Copiar la teoría a la carpeta
- 6) Resolver las siguientes derivadas utilizando la regla de la cadena

Tener en cuenta que:

$$y = \ln^2 x \text{ es igual a escribir } y = (\ln x)^2$$

Lo mismo se aplica a todas las funciones trigonométricas. Se usa esta forma de escribir para evitar el uso de paréntesis.

Ej.

$$y = \text{sen}^2 x \text{ es igual a escribir } y = (\text{sen } x)^2$$

a) $y = \cos 2x$

b) $y = \sqrt{x^3}$

c) $y = \ln(x^2)$

d) $y = \ln^2 x$

e) $y = e^{2x}$

f) $y = \text{sen}(\text{sen } x)$

g) $y = \sqrt{\text{tg } x}$

h) $y = \text{sen}^3 x$

i) $y = e^{x^3}$

j) $y = \log x^4$

k) $y = 5^{\ln x}$

l) $y = \text{cotg}(\sec x)$

Trabajo Práctico N° 10:

Derivada: Regla de la cadena – Parte 2

Teoría

En este práctico vamos a seguir trabajando con el uso de la regla de la cadena pero con ejercicios un poco más complejos.

En los ejercicios que se encuentran a continuación deberán aplicar la regla de la cadena y las propiedades de la derivada.

Por ejemplo:

$$y = x^5 \cdot \text{sen}(4x)$$

En este ejemplo, antes de aplicar regla de la cadena, debemos tener en cuenta que hay una operación, en este caso, una multiplicación y por ende primero debemos derivar como utilizar la propiedad de la derivada del producto de funciones.

$$y = u \cdot v \rightarrow y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u = x^5 \quad y \quad v = \text{sen}(4x)$$

Hallamos la derivada de u y v. En v debemos aplicar la regla de la cadena. Resolviendo resulta:

$$\begin{array}{ll} u = x^5 & y \quad v = \text{sen}(4x) \\ u' = 5x^4 & y \quad v' = 2 \cdot \cos(4x) \end{array}$$

Una vez obtenida u' y v' la remplazamos en la fórmula y' y obtenemos:

$$y' = 5x^4 \cdot \text{sen}(4x) + x^5 \cdot 2 \cdot \cos(4x)$$

Actividades:

- 1) Copiar el ejemplo en la carpeta
- 2) Resolver las siguientes derivadas utilizando la regla de la cadena

a) $y = 2^x + \text{tg}(3x)$

b) $y = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln \sqrt{x}$

c) $y = e^{2x^2} \cdot \ln x$

d) $y = x \cdot \ln(2x)$

e) $y = \text{sen}(6x) \cdot \cos x$

f) $y = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$

g) $y = \frac{\sqrt{3x+5}}{e^x}$

h) $y = 2x - 5\cos^3 x$

i) $y = \ln\left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)$

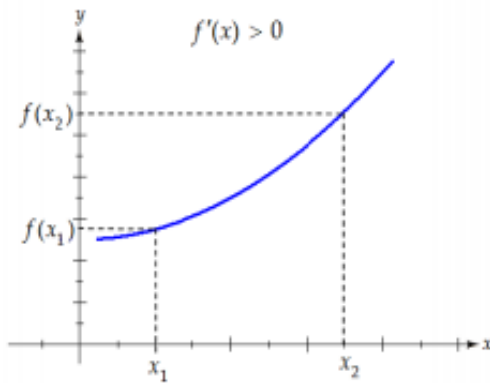
Trabajo Práctico N° 11:

Análisis de funciones

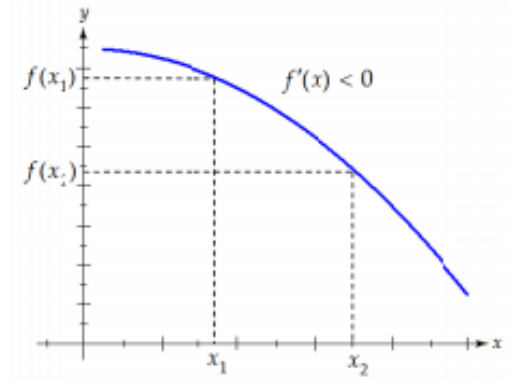
Teoría

Optimización de funciones – Puntos críticos

Una función $f(x)$ es **creciente** en un intervalo de su dominio cuando el valor de $f'(x)$ es positivo en dicho intervalo, y **decreciente** cuando es negativo.



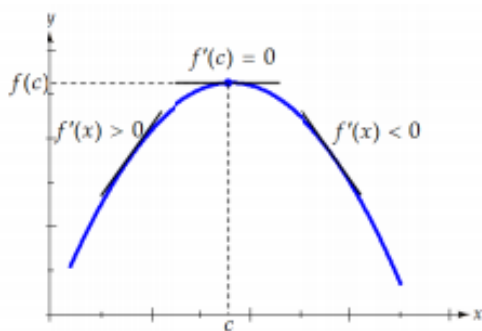
Función creciente



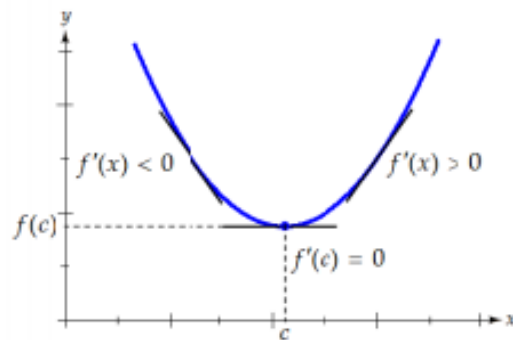
Función decreciente

Aquellos puntos en que la función cambia de creciente a decreciente o viceversa se denominan extremos relativos. Las condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos de una función son:

- $f'(x_1) = 0$ y $f''(x_1) < 0$ entonces $f(x_1)$ es un Máximo Relativo
- $f'(x_2) = 0$ y $f''(x_2) > 0$ entonces $f(x_2)$ es un Mínimo Relativo

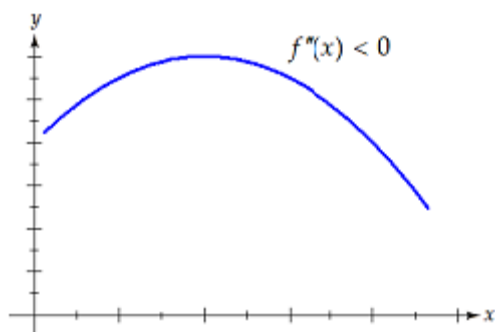


Máximo Relativo

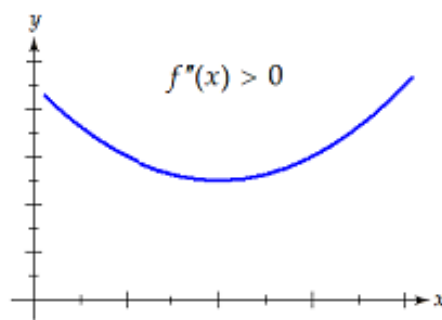


Mínimo Relativo

Los máximos relativos pertenecen a intervalos del dominio donde la función tiene **concavidad negativa (siendo $f''(x) < 0$)** y los mínimos relativos a intervalos donde la función tiene **concavidad positiva (siendo $f''(x) > 0$)**.

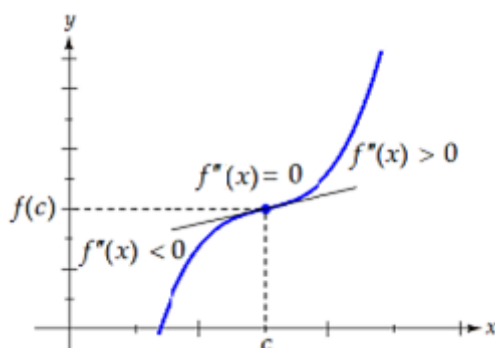


Concavidad negativa



Concavidad positiva

Aquellos puntos del dominio en que cambia la concavidad se denominan puntos de inflexión. Allí resulta $f''(x) = 0$



Para calcular los puntos mencionados anteriormente, debemos realizar los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada primera
2. Igualamos a cero la derivada primera
3. Resolvemos la ecuación resultante para hallar los puntos críticos y optamos por alguno de los dos criterios:

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

- Se marcan los valores críticos en la recta numérica. En cada uno de los intervalos creados por esos puntos, se toma un valor cualquiera.
- Se remplazan cada uno de los puntos hallados en la derivada primera
- Se observa el signo obtenido en el inciso anterior, antes y después del punto crítico y se aplica el criterio
 - Si los signos son (+) (-) se tiene un **MÁXIMO**
 - Si los signos son (-) (+) se tiene un **MÍNIMO**
 - En los otros casos (+) (+) o (-) (-) no existe extremo

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

- Obtenemos la segunda derivada
- Sustituimos en la segunda derivada para calcular cada punto crítico y vemos si es mayor, menor o igual a cero

- Si para el punto la segunda derivada es **menor que cero** hay **MÁXIMO**
- Si para el punto la segunda derivada es **mayor que cero** hay **MÍNIMO**
- Si para el punto la segunda derivada es **igual a cero** hay un **PUNTO DE INFLEXIÓN** o el criterio no es concluyente y es necesario aplicar el criterio de la primera derivada para determinar si hay un mínimo o máximo

Ejemplo:

Dada la función, $y = 3x^2 - 3x + 2$ hallar los puntos críticos y representarlos gráficamente, hallar, si existen, los máximos, mínimos utilizando el criterio de primera derivada

Para calcular los puntos mencionados anteriormente, debemos realizar los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada primera

$$y = 3x^2 - 3x + 2$$

$$y' = 6x - 3$$

2. Igualamos a cero la derivada primera

$$6x - 3 = 0$$

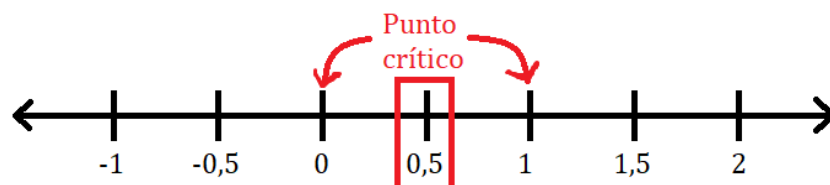
3. Resolvemos la ecuación resultante para hallar los puntos críticos

$$6x - 3 = 0$$

$$6x = 3$$

$$x = \frac{3}{6} = 0,5$$

4. Para usar el criterio de la primera derivada, debemos tomar un punto a la derecha e izquierda del punto crítico para analizar que sucede:



Y remplazamos esos valores en la primera derivada:

- $x=0$

$$y' = 6x - 3$$

$$y'(0) = 6 \cdot 0 - 3$$

$$y'(0) = -3$$

- $x=1$

$$y' = 6x - 3$$

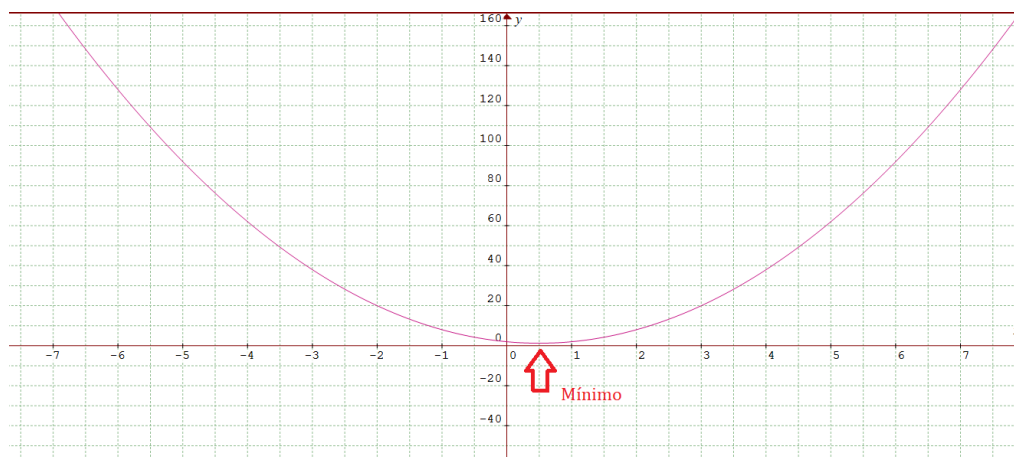
$$y'(1) = 6 \cdot 1 - 3$$

$$y'(1) = 3$$

5. Una vez realizados los cálculos se analiza con el criterio de la primera derivada:

$x < 0,5$ ($x=0$)	$y'(0) = -3$	FUNCIÓN DECRECIENTE
$x = 0,5$		PUNTO CRÍTICO
$x > 0,5$ ($x=1$)	$y'(1) = 3$	FUNCIÓN CRECIENTE

Como los signos de la primera derivada a izquierda a derecha son $(-)$ $(+)$, entonces en ese punto crítico hay un **MÍNIMO**.



Dada la función, $y = 3x^4 + 4x^3$ hallar los puntos críticos y, hallar, si existen, los máximos, mínimos utilizando el criterio de segunda derivada

Para calcular los puntos mencionados anteriormente, debemos realizar los siguientes pasos:

1. Hallamos la derivada primera

$$y = 3x^4 + 4x^3$$

$$y' = 12x^3 + 12x^2$$

2. Igualamos a cero la derivada primera

$$12x^3 + 12x^2 = 0$$

3. Resolvemos la ecuación resultante para hallar los puntos críticos

$$12x^3 + 12x^2 = 0$$

$$x^2(12x + 12) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 0$$

$$12x + 12 = 0$$

$$12x = -12$$

$$x = -1 \quad \rightarrow \quad x_3 = -1$$

O sea, que los tres puntos críticos son: $x_{1,2} = 0$ y $x_3 = -1$

4. Hallamos la segunda derivada, para ello se derivada la primera derivada

$$y' = 12x^3 + 12x^2$$

$$y'' = 36x^2 + 24x$$

5. Ahora, teniendo en cuenta el criterio de la segunda derivada, debemos remplazar el valor de cada punto crítico y analizar que sucede:

- $x = 0$

$$y'' = 36x^2 + 24x$$

$$y''(0) = 36 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0$$

$$y''(0) = 0$$

- $x = -1$

$$y'' = 36x^2 + 24x$$

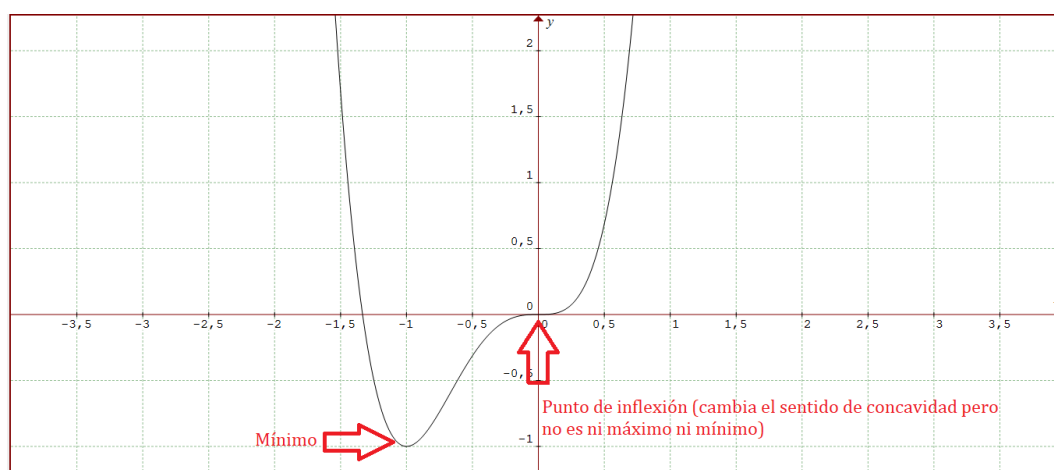
$$y''(-1) = 36 \cdot (-1)^2 + 24 \cdot (-1)$$

$$y''(-1) = 36 - 24$$

$$y''(-1) = 12$$

6. Una vez realizados los cálculos se analiza con el criterio de la segunda derivada:

• $x = 0$	$y''(0) = 0$	PUNTO DE INFLEXIÓN
• $x = -1$	$y''(-1) = 12$	MÍNIMO



Actividades:

1) Copiar la teoría a la carpeta

2) Dadas las siguientes funciones, hallar los puntos críticos y representarlos gráficamente y hallar, si existen, los máximos, mínimos utilizando el criterio de primera derivada:

a. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

b. $f(x) = 6x^2 - 6$

3) Dadas las siguientes funciones, hallar los puntos críticos y hallar, si existen, los máximos, mínimos utilizando el criterio de segunda derivada:

a. $f(x) = x^3 - 3x$

Trabajo Práctico N° 12:

Integrales: Definición

Teoría

Integral. Definición

La integración es un concepto fundamental del cálculo y del análisis matemático. Básicamente, una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitamente pequeños.

El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en el proceso de integración o antiderivación. Es muy común en la ingeniería y en la ciencia; se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Fue usado por primera vez por científicos como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow. Los trabajos de este último y los aportes de Newton generaron el teorema fundamental del cálculo integral, que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

Definamos entonces:

Integrar es un proceso que permite restituir una función que ha sido previamente derivada. Es decir, la operación opuesta de la derivada, así como la suma es a la resta.

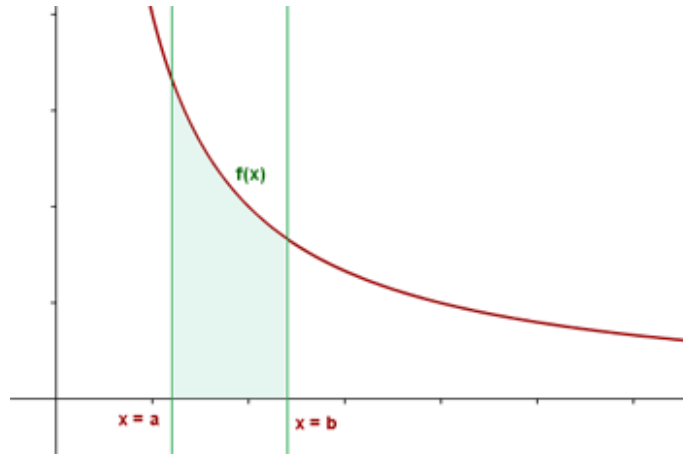
Por conveniencia se introduce una notación para la antiderivada de una función

Si $F'(x) = f(x)$, se representa $\int f(x)dx = F(x) + C$

A este grafo $\int$ se le llama símbolo de la integral y a la notación $\int f(x)dx$ se le llama integral indefinida de $f(x)$ con respecto a x . La función $f(x)$ se denomina integrando, el proceso recibe el nombre de integración. Al número C se le llama constante de integración y surge por la imposibilidad de la constante derivada. Finalmente, dx denota diferenciación con respecto a la variable x , lo cual indica la variable derivada.

Integral definida

Dada una función $f(x)$ y un intervalo $[a,b]$, la **integral definida** es igual al área limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



La **integral definida** se representa por $\int_a^b f(x)dx$

Actividades:

- 3) Copiar la teoría a la carpeta
- 4) Investigar y responder las siguientes preguntas
 - a. ¿Qué diferencia existe entre la integral indefinida de la definida?
 - b. ¿Cuáles son los distintos métodos de integración?
 - c. ¿cuáles son las aplicaciones de la integral definida?

Trabajo Práctico N° 13:

Integrales: Integrales Inmediatas

Derivadas inmediatas

Para determinar la derivada de una función en un punto se puede desarrollar la definición, tal como vimos anteriormente o, simplificando el proceso, usar una Tabla de derivadas inmediatas.

La integración de funciones simples es inmediata porque solo se necesita aplicar la tabla de integrales y realizar operaciones algebraicas simples.

Tabla de Integrales

$\int dx = x$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{con } n \neq -1$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$
$\int e^x dx = e^x$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax}$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$
$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$
$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$
$\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x$
$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{tg} x$
$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln(\cos x)$
$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - x$

$\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln(x \pm a)$
$\int \sec x dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x$
$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arccos} x$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$
$\int a^{kx} dx = \frac{a^x}{k \cdot \ln a}$
$\int \operatorname{cosec} x dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x$
$\int \frac{1}{1+\cos x} dx = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right)$
$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}a \cdot \operatorname{sen} 2ax$
$\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}a \cdot \operatorname{sen} 2ax$

Pasos para calcular la integral de una función usando la tabla de integrales inmediatas

Dada la siguiente integral $\int x^5 =$

5. Miramos en la tabla de integrales y buscamos una función que se parezca a la de nuestro ejercicio

Tabla de Integrales

$\int dx = x$	$\int \frac{1}{x \pm a} dx = \ln(x \pm a)$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{con } n \neq -1$	$\int \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x)$
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x$
$\int e^x dx = e^x$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arccos x$

Teniendo en cuenta nuestro ejercicio nuestra n vale 5, o sea $n=5$. Si nuestra n valdría -1 no podríamos utilizar esta fórmula por la aclaración que realiza la derecha de círculo.

6. Copiamos la fórmula y la remplazamos por los datos de nuestro ejercicio

$$n=5$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{con } n \neq -1$$

$$\int x^5 = \frac{x^{5+1}}{5+1}$$

7. Resolviendo las operaciones obtenemos nuestra integral

$$\int x^5 = \frac{x^6}{6}$$

Actividades:

- 4) Copiar la teoría a la carpeta
- 5) Resolver las siguientes integrales inmediatas

a) $\int x^3 dx =$

c) $\int \operatorname{sen} x dx =$

e) $\int \sec^2 x dx =$

g) $\int \ln x dx =$

i) $\int \frac{1}{x-3} dx =$

b) $\int e^{4x} dx =$

d) $\int \frac{1}{x} dx =$

f) $\int \operatorname{sen} \frac{1}{5} x dx =$

h) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$

j) $\int 3^{6x} dx =$

Trabajo Práctico N° 14:

Integrales: Propiedades

Teoría

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

De las reglas de derivación del producto de una constante por una función, de una suma de funciones y de una diferencia de funciones, se deducen las siguientes propiedades de la integral indefinida:

- 1) **La integral del producto de una constante** por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

Ej:

$$\int 3 \cdot \operatorname{sen} x \, dx = 3 \cdot \int \operatorname{sen} x \, dx = 3 \cdot (-\cos x) = -3 \cdot \cos x$$

- 2) **La integral de una suma de funciones** es igual a la suma de las integrales de las funciones sumando.

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Ej:

$$\int (x^4 + e^x) dx = \int x^4 dx + \int e^x dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + e^x = \frac{x^5}{5} + e^x$$

- 3) **La integral de una diferencia de funciones** es igual a la diferencia de las integrales de las funciones restando y sustrayendo.

$$\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Ej:

$$\int \left(\cos x - \frac{1}{x} \right) dx = \int \cos x \, dx - \int \frac{1}{x} \, dx = \operatorname{sen} x - \ln x$$

Actividades:

- 3) Copiar la teoría a la carpeta
- 4) Resolver las siguientes integrales aplicando propiedades

a) $\int (\cos x + 2) dx =$

b) $\int \left(5^x + \frac{5}{x+2} \right) dx =$

c) $\int (3x + e^x) dx =$

d) $\int \left(\frac{1}{3} \sqrt{x^3} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right) dx =$

e) $\int \left(\frac{2}{x} - 4 \ln x \right) dx =$

f) $\int (2 \operatorname{sen} 2x + 3 \cos 3x) dx =$

g) $\int (9x^2 - 5 \operatorname{tg} x) dx =$

h) $\int \left(\frac{2}{5x^3} - e^{6x} + \operatorname{sen} x \right) dx =$